

## Świat trójwymiarowy ( $x, y, z$ )

- ▶  $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$      $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$
- ▶ Wektory osi:  $\vec{i} = [1, 0, 0]$      $\vec{j} = [0, 1, 0]$      $\vec{k} = [0, 0, 1]$
- ▶ Dodawanie wektorów:  $\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$
- ▶ Mnożenie wektora przez liczbę:  $\lambda \vec{b} = [\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z]$
- ▶ Rozkład wektora na wersory osi (czyli tzw. wektory bazowe)  
 $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$
- ▶ Wartość (długość) wektora     $|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$
- ▶ Iloczyn skalarny wektorów     $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- ▶ Kąt  $\theta$  między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ :     $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta)$

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

$\blacktriangleright$  Dlaczego tak?

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

- $\blacktriangleright$  Dlaczego tak? Bo wynik przy **obrotach** ukł.wsp. zachowuje się jak **wektor**!

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

- $\blacktriangleright$  Dlaczego tak? Bo wynik przy **obrotach** ukł.wsp. zachowuje się jak **wektor**! W odpowiednio dobranych współrzędnych mamy  $\vec{a} = [|\vec{a}|, 0, 0]$ ,  $\vec{b} = [|\vec{b}| \cos(\theta), |\vec{b}| \sin(\theta), 0]$ .

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

- $\blacktriangleright$  Dlaczego tak? Bo wynik przy **obrotach** ukł.wsp. zachowuje się jak **wektor**! W odpowiednio dobranych współrzędnych mamy  $\vec{a} = [|\vec{a}|, 0, 0]$ ,  $\vec{b} = [|\vec{b}| \cos(\theta), |\vec{b}| \sin(\theta), 0]$ . Wtedy

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta) \vec{k} = [0, 0, |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta)]$$

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

- Dlaczego tak? Bo wynik przy **obrotach** ukł.wsp. zachowuje się jak **wektor**! W odpowiednio dobranych współrzędnych mamy  $\vec{a} = [|\vec{a}|, 0, 0]$ ,  $\vec{b} = [|\vec{b}| \cos(\theta), |\vec{b}| \sin(\theta), 0]$ . Wtedy

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta) \vec{k} = [0, 0, |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta)]$$

- Długość:  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta_{\min})$  gdzie  $0 \leq \theta_{\min} \leq 180^\circ$  jest mniejszym z dwóch kątów między wektorami

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów I

$$\blacktriangleright \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

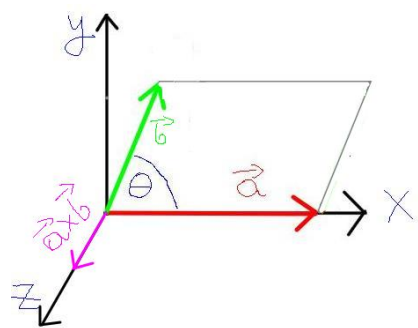
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

- Dlaczego tak? Bo wynik przy **obrotach** ukł.wsp. zachowuje się jak **wektor**! W odpowiednio dobranych współrzędnych mamy  $\vec{a} = [|\vec{a}|, 0, 0]$ ,  $\vec{b} = [|\vec{b}| \cos(\theta), |\vec{b}| \sin(\theta), 0]$ . Wtedy

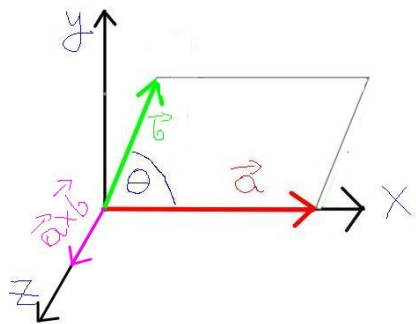
$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta) \vec{k} = [0, 0, |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta)]$$

- Długość:  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta_{\min})$  gdzie  $0 \leq \theta_{\min} \leq 180^\circ$  jest mniejszym z dwóch kątów między wektorami
- Interpretacja geometryczna długości : pole równoległoboku rozpiętego na wektorach  $\rightarrow$

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów II

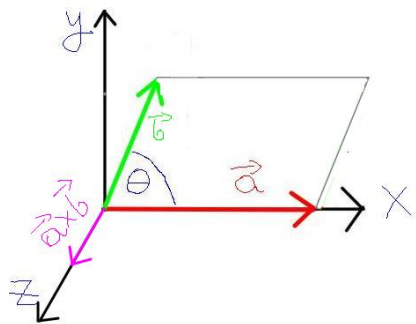


## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów II



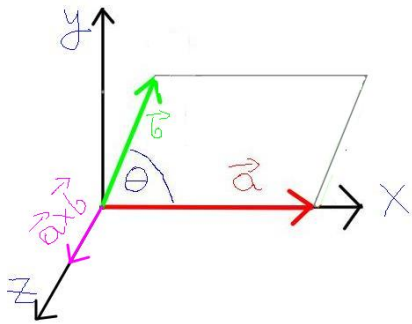
- Kierunek: prostopadły do każdego z czynników:  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów II



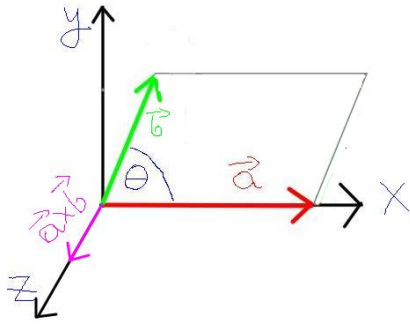
- ▶ Kierunek: prostopadły do każdego z czynników:  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
- ▶ Jest antysymetryczny (nieprzemienne!):  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów II



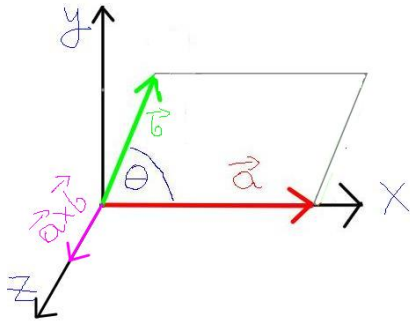
- ▶ Kierunek: prostopadły do każdego z czynników:  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
- ▶ Jest antysymetryczny (nieprzemienne!):  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- ▶  $\vec{0} \neq \vec{a} \parallel \vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow [\theta_{\min} = 0 \text{ lub } \theta_{\min} = 180^\circ] \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów II



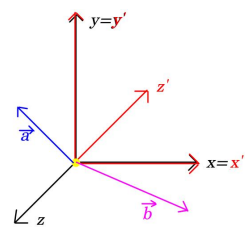
- ▶ Kierunek: prostopadły do każdego z czynników:  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
- ▶ Jest antysymetryczny (nieprzemienne!):  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- ▶  $\vec{0} \neq \vec{a} \parallel \vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow [\theta_{\min} = 0 \text{ lub } \theta_{\min} = 180^\circ] \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- ▶ Istnieje tylko w świecie trójwymiarowym

## Iloczyn wektorowy dwóch wektorów II



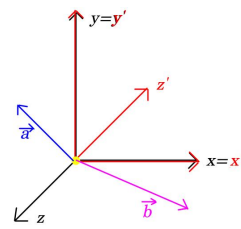
- ▶ Kierunek: prostopadły do każdego z czynników:  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
- ▶ Jest antysymetryczny (nieprzemienne!):  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- ▶  $\vec{0} \neq \vec{a} \parallel \vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow [\theta_{\min} = 0 \text{ lub } \theta_{\min} = 180^\circ] \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- ▶ Istnieje tylko w świecie trójwymiarowym
- ▶ W rzeczywistości jest pseudowektorem.

Pseudowektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  i odbicie lustrzane



# Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

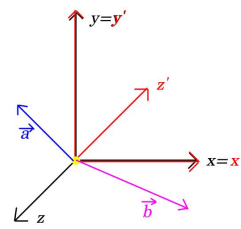
- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez



# Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

► Wektory osi obu układów powiązane są przez

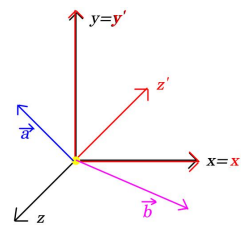
$$\vec{i} = \vec{i}'$$



# Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

► Wektory osi obu układów powiązane są przez

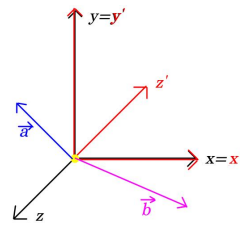
$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}'$$



## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

► Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



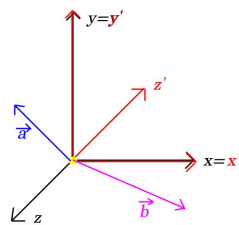
## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$

- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$



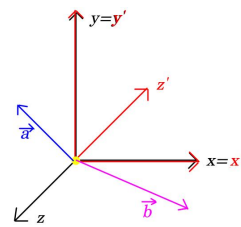
## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$

- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$



## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

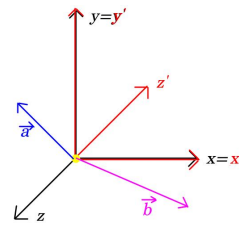
$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$

- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x,$$



## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

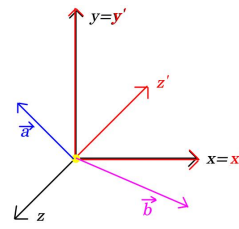
$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$

- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y,$$



## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

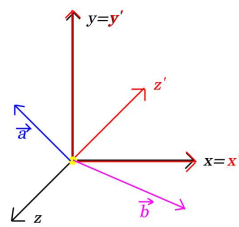
$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$

- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

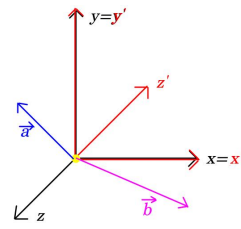
$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$



## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

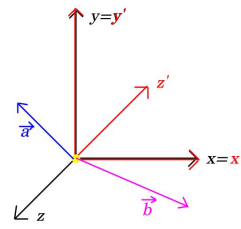
- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x,$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

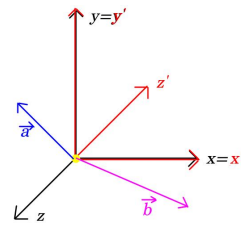
- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y,$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

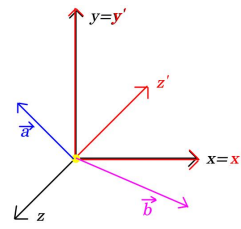
- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

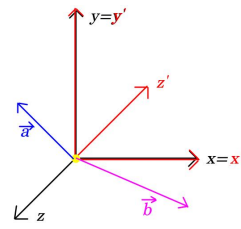
$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

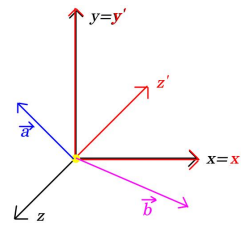
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

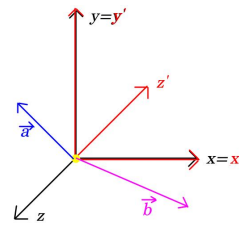
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

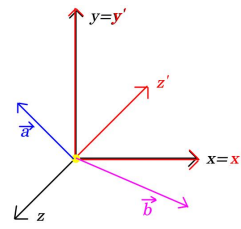
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

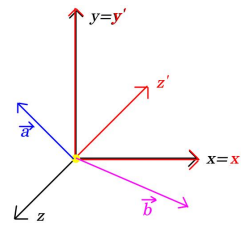
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

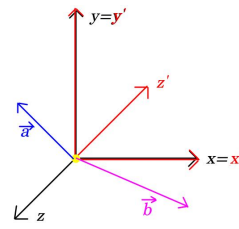
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

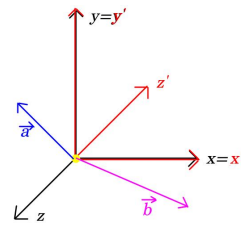
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \\ a'_x & a'_y & \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

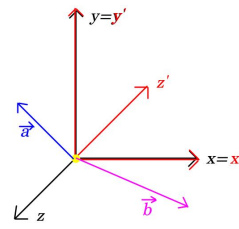
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \\ a'_x & a'_y & -a'_z \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

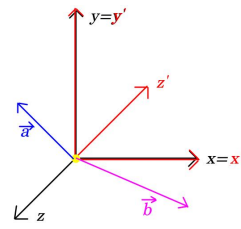
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \\ a'_x & a'_y & -a'_z \\ b'_x & b'_y & -b'_z \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

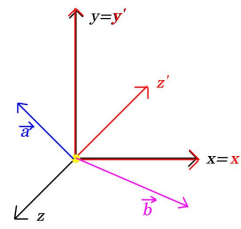
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \\ a'_x & a'_y & -a'_z \\ b'_x & b'_y & -b'_z \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

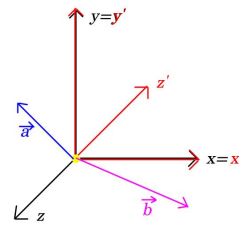
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \\ a'_x & a'_y & -a'_z \\ b'_x & b'_y & -b'_z \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

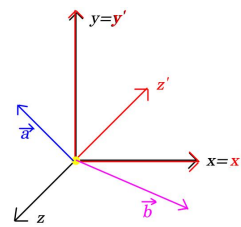
- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \\ a'_x & a'_y & -a'_z \\ b'_x & b'_y & -b'_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix}$$

## Pseudowektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i odbicie lustrzane

- ▶ Wektory osi obu układów powiązane są przez

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \vec{j}' \quad \vec{k} = -\vec{k}'$$



- ▶ Dowolny wektor  $\vec{a}$  ma postać

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_x \vec{i}' + a_y \vec{j}' + (-a_z) \vec{k}'$$

stąd

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = -a_z$$

- ▶ Podobnie dla wektora  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  mamy

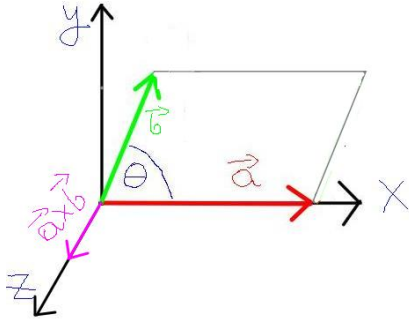
$$b'_x = b_x, \quad b'_y = b_y, \quad b'_z = -b_z$$

- ▶ Obliczmy  $\vec{a} \times \vec{b}$  w układzie nieprimowanym

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & -\vec{k}' \\ a'_x & a'_y & -a'_z \\ b'_x & b'_y & -b'_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix}$$

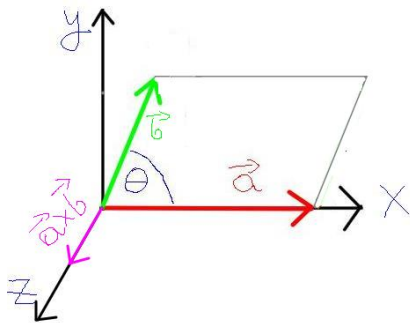
- ▶ Przy odbiciu układu współrzędnych **pseudowektor**  $\vec{a} \times \vec{b}$  zmienia znak

## O pseudowektorach



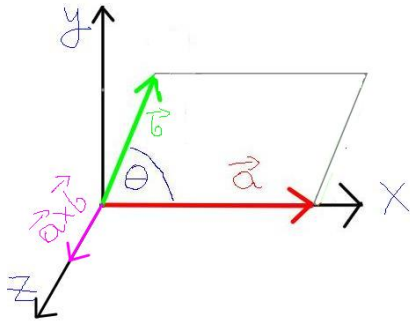
- Iloczyn wektorowy ma wartość i kierunek niezmiennie się przy odbiciach

## O pseudowektorach



- ▶ Iloczyn wektorowy ma wartość i kierunek niezmiennie się przy odbiciach
- ▶ Zwrot: w prawoskrętnym układzie współrzędnych, reguła prawej ręki (pchamy przez **mniejszy** kąt)

## O pseudowektorach



- ▶ Iloczyn wektorowy ma wartość i kierunek niezmienną się przy odbiciach
- ▶ Zwrot: w prawoskrętnym układzie współrzędnych, reguła prawej ręki (pchamy przez **mniejszy** kąt)
- ▶ Pewne wielkości w naturalny sposób są pseudowektorami np. prędkość kątowa

O pseudowektorach

## O pseudowektorach

- ▶ Iloczyn skalarny dwóch pseudowektorów jest skalarem

## O pseudowektorach

- ▶ Iloczyn skalarny dwóch pseudowektorów jest skalarem
- ▶ Iloczyn wektorowy wektora i pseudowektora jest wektorem (np. siła Lorentza)

## O pseudowektorach

- ▶ Iloczyn skalarny dwóch pseudowektorów jest skalarem
- ▶ Iloczyn wektorowy wektora i pseudowektora jest wektorem (np. siła Lorentza)
- ▶ Pseudowektory w prawach fizyki:

## O pseudowektorach

- ▶ Iloczyn skalarny dwóch pseudowektorów jest skalarem
- ▶ Iloczyn wektorowy wektora i pseudowektora jest wektorem (np. siła Lorentza)
- ▶ Pseudowektory w prawach fizyki:
  - ▶  $\text{pseudowektor}_1 = \text{pseudowektor}_2$

## O pseudowektorach

- ▶ Iloczyn skalarny dwóch pseudowektorów jest skalarem
- ▶ Iloczyn wektorowy wektora i pseudowektora jest wektorem (np. siła Lorentza)
- ▶ Pseudowektory w prawach fizyki:
  - ▶  $\text{pseudowektor}_1 = \text{pseudowektor}_2 \Rightarrow \text{OK}$

## O pseudowektorach

- ▶ Iloczyn skalarny dwóch pseudowektorów jest skalarem
- ▶ Iloczyn wektorowy wektora i pseudowektora jest wektorem (np. siła Lorentza)
- ▶ Pseudowektory w prawach fizyki:
  - ▶  $\text{pseudowektor}_1 = \text{pseudowektor}_2 \Rightarrow \text{OK}$
  - ▶  $\text{pseudowektor}_1 = \text{wektor}_2$

Rozpad  ${}^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + e^{-} + \bar{\nu}_e$



Rysunek 1: Chien-Shiung Wu, after whom the Wu experiment is named, designed the experiment and led the team that carried out the test of the conservation of parity in 1956. (źródło: [Wikipedia](#))

Rozpad  $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$



**Rysunek 1:** Chien-Shiung Wu, after whom the Wu experiment is named, designed the experiment and led the team that carried out the test of the conservation of parity in 1956. ([źródło: Wikipedia](#))

- ▶ Nagroda Nobla z fizyki (1957) dla Tsung-Dao Lee i Chen-Ning Yang'a.