Pęd punktu materialnego

- Pędem $\vec{p}$ ciała (punktu materialnego) nazywamy iloczyn jego masy m i prędkości $\vec{v}$
$$\vec{p} = m\vec{v}$$
W szczególności widzimy, że pęd jest wektorem mającym kierunek i zwrot wektora prędkości.
- W terminach pędu, 2ZDN możemy przepisać jako
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{tot}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$$
- Równoważnie mamy
$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{tot}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)\mathrm{d}t$$
Całkę występującą po prawej stronie nazywamy popędem (lub impulsem) siły wypadkowej.

Pęd układu punktów materialnych

Pęd układu punktów materialnych

- Pęd układu dwóch punktów materialnych o pędach $\vec{p_1}$ oraz $\vec{p_2}$ definiujemy jako

$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$

Pęd układu punktów materialnych

- Pęd układu dwóch punktów materialnych o pędach $\vec{p_1}$ oraz $\vec{p_2}$ definiujemy jako

$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$

- 2ZDN

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p_1}}{\mathrm{d}t} = \vec{F_1}^{zew} + \vec{F_1^2},$$

Pęd układu punktów materialnych

- Pęd układu dwóch punktów materialnych o pędach $\vec{p_1}$ oraz $\vec{p_2}$ definiujemy jako
$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$
- 2ZDN
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p_1}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_1^2 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p_2}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2^{zew} + \vec{F}_2^1 \,,$$

Pęd układu punktów materialnych

- Pęd układu dwóch punktów materialnych o pędach $\vec{p}_1$ oraz $\vec{p}_2$ definiujemy jako
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$
- 2ZDN
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_1^2 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2^{zew} + \vec{F}_2^1 \,,$$
- dodajemy stronami
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_2^{zew} + \left\{ \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^1 \right\}$$

Pęd układu punktów materialnych

- Pęd układu dwóch punktów materialnych o pędach $\vec{p}_1$ oraz $\vec{p}_2$ definiujemy jako
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$
- 2ZDN
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_1^2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2^{zew} + \vec{F}_2^1\,,$$
- dodajemy stronami
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_2^{zew} + \left\{\vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^1\right\}$$
- Z 3ZDN
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_2^{zew}$$

Pęd układu punktów materialnych

- Pęd układu dwóch punktów materialnych o pędach $\vec{p_1}$ oraz $\vec{p_2}$ definiujemy jako
$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$
- 2ZDN
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p_1}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_1^2 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p_2}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2^{zew} + \vec{F}_2^1 \,,$$
- dodajemy stronami
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_2^{zew} + \left\{ \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^1 \right\}$$
- Z 3ZDN
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \vec{F}_2^{zew}$$
- Szybkość zmian całkowitego pędu układu jest sumą wszystkich sił **zewnętrznych** działających na ten układ.

Pęd układu punktów materialnych

Pęd układu punktów materialnych

- Dla układu złożonego z dowolnej liczby n punktów materialnych o pędach $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$, całkowitego pędu p układu to

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_n$$

Pęd układu punktów materialnych

- Dla układu złożonego z dowolnej liczby n punktów materialnych o pędach $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$, całkowitego pędu p układu to

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_n$$

- Podobnie jak dla dwóch punktów, pochodna całkowitego pędu względem czasu jest sumą wszystkich sił **zewnętrznych** działających na układ.

Pęd układu punktów materialnych

- Dla układu złożonego z dowolnej liczby n punktów materialnych o pędach $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$, całkowitego pędu p układu to

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_n$$

- Podobnie jak dla dwóch punktów, pochodna całkowitego pędu względem czasu jest sumą wszystkich sił **zewnętrznych** działających na układ. (Siły wzajemnego oddziaływania między ciałami układu parami znoszą się dzięki 3ZDN.)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{zew} + \ldots + \vec{F}_n^{zew} \tag{11}$$

Zasada zachowania pędu

Zasada zachowania pędu

- **Jeśli układ jest izolowany** (tj. na punkty tego układu nie działają żadne siły zewnętrzne), to **całkowity pęd tego układu nie zmienia się w czasie.**

Zasada zachowania pędu

- **Jeśli układ jest izolowany** (tj. na punkty tego układu nie działają żadne siły zewnętrzne), to **całkowity pęd tego układu nie zmienia się w czasie.**
- Zasada zachowania pędu (ZZP), podobnie jak zasada zachowania energii mechanicznej (ZZEM), daje nam metodę częściowego scałkowania (rozwiązania) równań ruchu.

Zasada zachowania pędu

- **Jeśli układ jest izolowany** (tj. na punkty tego układu nie działają żadne siły zewnętrzne), to **całkowity pęd tego układu nie zmienia się w czasie.**
- Zasada zachowania pędu (ZZP), podobnie jak zasada zachowania energii mechanicznej (ZZEM), daje nam metodę częściowego scałkowania (rozwiązania) równań ruchu.
- Ponieważ pęd jest wektorem, zachowanie pędu daje nam trzy równania (po jednym dla każdej ze składowych).

Zasada zachowania pędu

- **Jeśli układ jest izolowany** (tj. na punkty tego układu nie działają żadne siły zewnętrzne), to **całkowity pęd tego układu nie zmienia się w czasie.**
- Zasada zachowania pędu (ZZP), podobnie jak zasada zachowania energii mechanicznej (ZZEM), daje nam metodę częściowego scałkowania (rozwiązania) równań ruchu.
- Ponieważ pęd jest wektorem, zachowanie pędu daje nam trzy równania (po jednym dla każdej ze składowych).
- W problemach mechanicznych ZZP jest dużo ogólniejszą zasadą niż ZZEM, gdyż działa dla zupełnie dowolnych (tj. niezachowaczych) sił wzajemnego oddziaływania między punktami układu.

Zasada zachowania pędu

- **Jeśli układ jest izolowany** (tj. na punkty tego układu nie działają żadne siły zewnętrzne), to **całkowity pęd tego układu nie zmienia się w czasie.**
- Zasada zachowania pędu (ZZP), podobnie jak zasada zachowania energii mechanicznej (ZZEM), daje nam metodę częściowego scałkowania (rozwiązania) równań ruchu.
- Ponieważ pęd jest wektorem, zachowanie pędu daje nam trzy równania (po jednym dla każdej ze składowych).
- W problemach mechanicznych ZZP jest dużo ogólniejszą zasadą niż ZZEM, gdyż działa dla zupełnie dowolnych (tj. niezachowaczych) sił wzajemnego oddziaływania między punktami układu.
- W ogólniejszym ujęciu ZZP, podobnie jak ZZE (całkowitej) należą do fundamentalnych praw przyrody. Mimo, że wyprowadziliśmy tu ZZP z 3ZDN, ZZP jest prawem dużo ogólniejszym i uniwersalnie prawdziwym

Model silnika odrzutowego

Model silnika odrzutowego

- *Student o masie M stoi na deskorolce o masie m. W pewnej chwili student wyrzucił kamień o masie μ nadając mu prędkość o wartości $|\vec{v}|$ skierowaną pod kątem α do poziomu. Jaką prędkość $|\vec{V}|$ uzyska student, jeśli początkowo spoczywał a tarcie jest zaniedbywalne?*

Model silnika odrzutowego

- *Student o masie M stoi na deskorolce o masie m. W pewnej chwili student wyrzucił kamień o masie μ nadając mu prędkość o wartości $|\vec{v}|$ skierowaną pod kątem α do poziomu. Jaką prędkość $|\vec{V}|$ uzyska student, jeśli początkowo spoczywał a tarcie jest zaniedbywalne?*
- W kierunku pionowym działają siły nacisku (i grawitacji), więc pionowa składowa pędu nie jest zachowana. Składowa pozioma jest zachowana (przy pominięciu tarcia):

$$0 = (M + m)|\vec{V}| - \mu|\vec{v}| \cos \alpha$$

Model silnika odrzutowego

- *Student o masie M stoi na deskorolce o masie m. W pewnej chwili student wyrzucił kamień o masie μ nadając mu prędkość o wartości $|\vec{v}|$ skierowaną pod kątem α do poziomu. Jaką prędkość $|\vec{V}|$ uzyska student, jeśli początkowo spoczywał a tarcie jest zaniedbywalne?*
- W kierunku pionowym działają siły nacisku (i grawitacji), więc pionowa składowa pędu nie jest zachowana. Składowa pozioma jest zachowana (przy pominięciu tarcia):
$$0 = (M + m)|\vec{V}| - \mu|\vec{v}| \cos \alpha$$
- Student uzyska prędkość poziomą o wartości
$$|\vec{V}| = \frac{\mu}{M + m}|\vec{v}| \cos \alpha$$

Model silnika odrzutowego

- *Student o masie M stoi na deskorolce o masie m. W pewnej chwili student wyrzucił kamień o masie μ nadając mu prędkość o wartości $|\vec{v}|$ skierowaną pod kątem α do poziomu. Jaką prędkość $|\vec{V}|$ uzyska student, jeśli początkowo spoczywał a tarcie jest zaniedbywalne?*
- W kierunku pionowym działają siły nacisku (i grawitacji), więc pionowa składowa pędu nie jest zachowana. Składowa pozioma jest zachowana (przy pominięciu tarcia):
$$0 = (M + m)|\vec{V}| - \mu|\vec{v}| \cos\alpha$$
- Student uzyska prędkość poziomą o wartości
$$|\vec{V}| = \frac{\mu}{M + m}|\vec{v}| \cos\alpha$$
- Przy dużej prędkości $|\vec{v}|$ wyrzucania kamienia, nawet jeśli jest on niezbyt ciężki, student może uzyskać sporą prędkość.

Model silnika odrzutowego

- *Student o masie M stoi na deskorolce o masie m. W pewnej chwili student wyrzucił kamień o masie μ nadając mu prędkość o wartości $|\vec{v}|$ skierowaną pod kątem α do poziomu. Jaką prędkość $|\vec{V}|$ uzyska student, jeśli początkowo spoczywał a tarcie jest zaniedbywalne?*
- W kierunku pionowym działają siły nacisku (i grawitacji), więc pionowa składowa pędu nie jest zachowana. Składowa pozioma jest zachowana (przy pominięciu tarcia):
$$0 = (M+m)|\vec{V}| - \mu|\vec{v}|\cos\alpha$$
- Student uzyska prędkość poziomą o wartości
$$|\vec{V}| = \frac{\mu}{M+m}|\vec{v}|\cos\alpha$$
- Przy dużej prędkości $|\vec{v}|$ wyrzucania kamienia, nawet jeśli jest on niezbyt ciężki, student może uzyskać sporą prędkość.
- W silnikach odrzutowych, wyrzucane są gazy powstałe na skutek spalania paliwa (gazy mają dużą energię kinetyczną uzyskaną z wytworzonej w spalaniu energii cieplnej).

Środek masy

Środek masy

- Położenie środka masy układu punktów materialnych jest średnią ważoną położeń poszczególnych punktów układu

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2\, + \ldots + m_n\,\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \qquad (12)$$

Środek masy

- Położenie środka masy układu punktów materialnych jest średnią ważoną położeń poszczególnych punktów układu

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \tag{12}$$

- W mianowniku występuje całkowita masa układu.

Środek masy

- Położenie środka masy układu punktów materialnych jest średnią ważoną położeń poszczególnych punktów układu
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2\, + \ldots + m_n\,\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \qquad (12)$$
- W mianowniku występuje całkowita masa układu.
- W terminach składowych (współrzędnych)
$$x_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,x_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \quad y_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,y_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \quad z_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,z_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$$

Środek masy

- Położenie środka masy układu punktów materialnych jest średnią ważoną położeń poszczególnych punktów układu
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2\, + \ldots + m_n\,\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \tag{12}$$
- W mianowniku występuje całkowita masa układu.
- W terminach składowych (współrzędnych)
$$x_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,x_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \quad y_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,y_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \quad z_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,z_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$$
- Różniczkując (12) dostajemy prędkość środka masy
$$\vec{v}_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$$

Środek masy

- Położenie środka masy układu punktów materialnych jest średnią ważoną położeń poszczególnych punktów układu

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \, + \ldots + m_n\,\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \tag{12}$$

- W mianowniku występuje całkowita masa układu.
- W terminach składowych (współrzędnych)

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,x_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \quad y_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,y_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \quad z_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,z_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$$

- Różniczkując (12) dostajemy prędkość środka masy

$$\vec{v}_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{\vec{p}}{m} \tag{13}$$

  tj. pęd układu puntków materialnych jest iloczynem całkowitej masy układu i prędkości środka masy układu.

Środek masy

- Położenie środka masy układu punktów materialnych jest średnią ważoną położeń poszczególnych punktów układu
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2\, + \ldots + m_n\,\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j} \tag{12}$$
- W mianowniku występuje całkowita masa układu.
- W terminach składowych (współrzędnych)
$$x_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,x_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \quad y_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,y_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \quad z_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,z_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j}$$
- Różniczkując (12) dostajemy prędkość środka masy
$$\vec{v}_{\text{ŚM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{\vec{p}}{m} \tag{13}$$
tj. pęd układu puntków materialnych jest iloczynem całkowitej masy układu i prędkości środka masy układu.
- Różniczkując (13) dostajemy przyspieszenie środka masy
$$\vec{a}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\vec{F}^{zew}_{tot} \tag{14}$$

Ruch postępowy ciała

Ruch postępowy ciała

- Widzimy, że ruch środka masy spełnia 2ZDN, jeśli za siłę wypadkową weźmiemy sumę wszystkich sił zewnętrznych działających na układ.

Ruch postępowy ciała

- Widzimy, że ruch środka masy spełnia 2ZDN, jeśli za siłę wypadkową weźmiemy sumę wszystkich sił zewnętrznych działających na układ.
- Środek masy porusza się tak jak punkt materialny poddany działaniu takich samych sił jak siły działające na całe ciało (lub układ punktów).

Ruch postępowy ciała

- Widzimy, że ruch środka masy spełnia 2ZDN, jeśli za siłę wypadkową weźmiemy sumę wszystkich sił zewnętrznych działających na układ.
- Środek masy porusza się tak jak punkt materialny poddany działaniu takich samych sił jak siły działające na całe ciało (lub układ punktów).
- Jest tak nawet gdy poszczególne punty (części) układu wykonują dowolnie skomplikowane ruchy pod wpływem sił wewnętrznych, działających między punktami układu.

Ruch postępowy ciała

- Widzimy, że ruch środka masy spełnia 2ZDN, jeśli za siłę wypadkową weźmiemy sumę wszystkich sił zewnętrznych działających na układ.
- Środek masy porusza się tak jak punkt materialny poddany działaniu takich samych sił jak siły działające na całe ciało (lub układ punktów).
- Jest tak nawet gdy poszczególne punty (części) układu wykonują dowolnie skomplikowane ruchy pod wpływem sił wewnętrznych, działających między punktami układu.
- Przykład: jeśli spoczywające ciało, które znajduje się w próżni w stanie nieważkości, ulegnie wybuchowi, jego środek masy pozostaje w spoczynku po wybuchu.

Ruch postępowy ciała

- Widzimy, że ruch środka masy spełnia 2ZDN, jeśli za siłę wypadkową weźmiemy sumę wszystkich sił zewnętrznych działających na układ.
- Środek masy porusza się tak jak punkt materialny poddany działaniu takich samych sił jak siły działające na całe ciało (lub układ punktów).
- Jest tak nawet gdy poszczególne punty (części) układu wykonują dowolnie skomplikowane ruchy pod wpływem sił wewnętrznych, działających między punktami układu.
- Przykład: jeśli spoczywające ciało, które znajduje się w próżni w stanie nieważkości, ulegnie wybuchowi, jego środek masy pozostaje w spoczynku po wybuchu.
- Obserwacja ta pozwala zrozumieć, dlaczego ciała o skończonych rozmiarach w problemach mechanicznych można często traktować jak punty materialne.

Ruch postępowy ciała

- Widzimy, że ruch środka masy spełnia 2ZDN, jeśli za siłę wypadkową weźmiemy sumę wszystkich sił zewnętrznych działających na układ.
- Środek masy porusza się tak jak punkt materialny poddany działaniu takich samych sił jak siły działające na całe ciało (lub układ punktów).
- Jest tak nawet gdy poszczególne punty (części) układu wykonują dowolnie skomplikowane ruchy pod wpływem sił wewnętrznych, działających między punktami układu.
- Przykład: jeśli spoczywające ciało, które znajduje się w próżni w stanie nieważkości, ulegnie wybuchowi, jego środek masy pozostaje w spoczynku po wybuchu.
- Obserwacja ta pozwala zrozumieć, dlaczego ciała o skończonych rozmiarach w problemach mechanicznych można często traktować jak punty materialne.
- Ruch środka masy ciała nazywamy ruchem postępowym ciała. Jeśli wszystkie punkty (części) ciała spoczywają względem jego środka masy, mówimy że ciało wykonuje tylko ruch postępowy. W ogólności, poszczególne części ciała poruszają się względem środka masy ze względu na obroty i deformacje.

Środek masy ciał rozciągłych

Środek masy ciał rozciągłych

- Dla ciał rozciągłych (np. dla kuli o pewnej gęstości $\rho(\vec{r})$) środek masy definiujemy dzieląc myślowo ciało na małe prostopadłościany o położeniach $\vec{r_i}$ i objętościach $\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, a następnie przechodząc do granicy gdy każda z tych objętości dąży do zera
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{\lim \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \rho(\vec{r_i}) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}{\lim \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{r_i}) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}$$

Środek masy ciał rozciągłych

- Dla ciał rozciągłych (np. dla kuli o pewnej gęstości $\rho(\vec{r})$) środek masy definiujemy dzieląc myślowo ciało na małe prostopadłościany o położeniach $\vec{r_i}$ i objętościach $\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, a następnie przechodząc do granicy gdy każda z tych objętości dąży do zera
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{\lim \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \rho(\vec{r_i}) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}{\lim \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{r_i}) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}$$
- W granicy dostajemy całkę potrójną
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{\iiint_V \vec{r} \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}$$

  gdzie V jest obszarem przestrzeni po którym całkujemy (tj. obszarem zajmowanym przez ciało).

Środek masy ciał rozciągłych

- Dla ciał rozciągłych (np. dla kuli o pewnej gęstości $\rho(\vec{r})$) środek masy definiujemy dzieląc myślowo ciało na małe prostopadłościany o położeniach $\vec{r}_i$ i objętościach $\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, a następnie przechodząc do granicy gdy każda z tych objętości dąży do zera
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{\lim \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}{\lim \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{r}_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}$$
- W granicy dostajemy całkę potrójną
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{\iiint_V \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$
gdzie V jest obszarem przestrzeni po którym całkujemy (tj. obszarem zajmowanym przez ciało).
- W terminach współrzędnych mamy
$$x_{\text{ŚM}} = \frac{\iiint_V x\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$
i podobnie dla $y_{\text{ŚM}}$ oraz $z_{\text{ŚM}}$

Środek masy ciał rozciągłych

- Dla ciał rozciągłych (np. dla kuli o pewnej gęstości $\rho(\vec{r})$) środek masy definiujemy dzieląc myślowo ciało na małe prostopadłościany o położeniach $\vec{r}_i$ i objętościach $\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, a następnie przechodząc do granicy gdy każda z tych objętości dąży do zera
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{\lim \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}{\lim \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{r}_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}$$
- W granicy dostajemy całkę potrójną
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{\iiint_V \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$
gdzie V jest obszarem przestrzeni po którym całkujemy (tj. obszarem zajmowanym przez ciało).
- W terminach współrzędnych mamy
$$x_{\text{ŚM}} = \frac{\iiint_V x\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$
i podobnie dla $y_{\text{ŚM}}$ oraz $z_{\text{ŚM}}$
- W mianownikach występuje całkowita masa ciała.