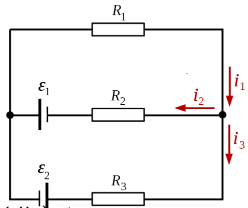
Obwody elektryczne – przypomnienie



Źródło : Wikipedia

W schemacie obwodu wyróżniamy

- elementy obwodu (oporniki, cewki, kondenstatory, źródła)
- gałęzie
- węzły, tj. punkty w których łączy się $\geqslant 3$ gałęzi
- oczka (tj. minimalne zbiory gałęzi tworzące drogę zamkniętą)

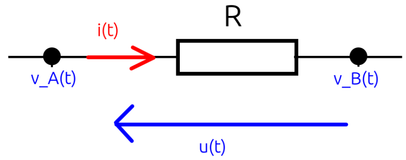
W każdej gałęzi obwodu płynie prąd o określonym natężeniu $i(t)$ mierzonym w amperach $[i(t)] = 1A$.

Każdy węzeł obwodu A=1,2,...,N posiada określony potencjał elektryczny $v_A(t)$ mierzony w woltach $1V = \frac{1W}{1A}$.

Zwykle zamiast posługiwać się potencjałem, używamy różnicy potencjałów $u(t) = v_B(t) - v_A(t)$ między węzłami A i B. Choć jest to wielkość skalarna, oznaczamy ją strzałką zwróconą od węzła A do węzła B, tak jak wektor $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.

Układ prądów $i(t)$ na gałęziach i napięć $u(t)$ między węzłami można uważać za zestaw zmiennych dynamicznych charakteryzujących stan obwodu jako układu fizycznego

Elementy obwodu

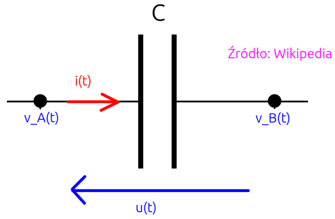


Elementy obwodu scharakteryzowane są związkiem między natężeniem prądu $i(t)$ płynącego przez dany element a napięciem $u(t)$ na tym elemencie.
Dla idealnego **opornika** (rezystora) liniowego napięcie na zaciskach $u(t) = v_A(t) - v_B(t)$ jest proporcjonalne do natężenia prądu płynącego $i(t)$ przez opornik

$$u(t) = R\, i(t)$$

Współczynnik proporcjonalności $R > 0$ to opór elektryczny (rezystancja) opornika. Jednostką oporu jest om $1\Omega = \frac{1V}{1A}$.
Ponieważ $R > 0$ prąd płynie w stronę punktu o mniejszym potencjale.

Elementy obwodu: kondensator



Dla idealnego **kondensatora** liniowego, natężenie prądu $i(t)$ jest proporcjonalne do pochodnej napięcia $u(t) = v_A(t) - v_B(t)$ po czasie

$$i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

lub

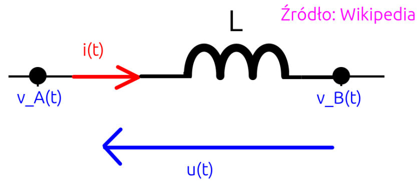
$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Współczynnik proporcjonalności $C > 0$ to pojemność elektryczna mierzona w faradach:

$$1F = \frac{1A \cdot 1s}{1V}$$

Częściej stosuje się jednostki pochodne $1\mu F$, $1nF$

Elementy obwodu: cewka



Dla idealnej **cewki** liniowej, napięcie $u(t) = v_A(t) - v_B(t)$ na zaciskach jest proporcjonalne do pochodnej natężenie prądu $i(t)$ względem czasu.

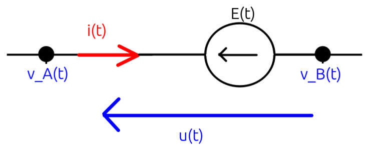
$$u(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

Współczynnik proporcjonalności $L > 0$ to indukcyjność cewki.
Jednostką indukcyjności jest henr

$$1H = \frac{1V \cdot 1s}{1A}$$

Elementy aktywne obwodu: źródła

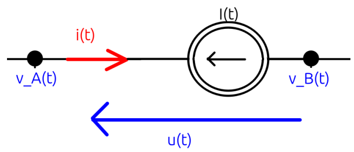
- Źródło napięciowe



Napięcie na zaciskach idealnego źródła napięcia nie zależy od prądu płynącego przez źródło

$$u(t) = E(t)$$

- Źródło prądowe



Prąd płynący przez idealne źródła prądu nie zależy od napięcia na jego zaciskach

$$i(t) = -\mathcal{I}(t)$$

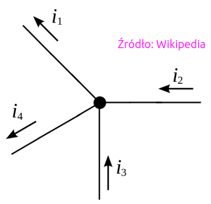
Prawa Kirchhoffa (1845)

- Pierwsze prawo Kirchhofa:

  Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła obwodu jest równa zeru.

  Dla konfiguracji z rysunku mamy

  $$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$$

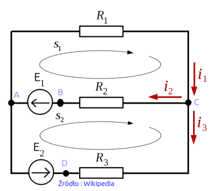


- Drugie prawo Kirchhofa: każdemu węzłowi obwodu można przypisać potencjał elektryczny. Standardowe sformułowanie :

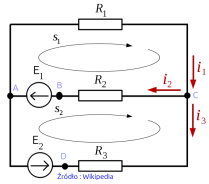
  Suma napięć w dowolnym oczku obwodu jest równa zero.

  Dla konfiguracji z rysunku mamy

  $$(v_C - v_A) + (v_A - v_B) + (v_B - v_C) = 0$$



Zastosowania praw Kirchhoffa



- W każdej gałęzi zakładamy (zupełnie dowolnie) pewien kierunek (zwrot) prądu i pewną wartość natężenia $i_K(t)$
- W każdym węźle spełnione jest pierwsze prawo Kirchhoffa

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

- Dla każdego niezależnego oczka przyjmujemy (zupełnie dowolnie) pewnien kierunek (zwrot) obiegu, i stosujemy drugie prawo Kirchhoffa:
  - Napotykając idealne źródło napięcia $E(t)$ piszemy $+E(t)$ jeśli biegunowość (zwrot) źródła jest zgodna ze zwrotem obiegu ($-E(t)$ w przeciwnym przypadku)
  - Napotykając rezystor/cewkę/kondensator piszemy
    $$-Ri(t) \quad || \quad -L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \quad || \quad -\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$
    jeśli założony zwrot prądu zgadza się z przyjętym zwrotem obiegu oczka (w przeciwnym przypadku rezystor/cewka/kondensator wchodzą ze znakiem $+$)
  - Napięcie na źródle prądowym jest jedną z niewiadomych (tak jak prąd w gałęzi zawierającej źródło napięciowe)

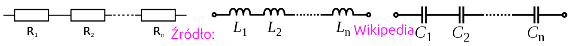
$$+E_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0, \qquad -E_2 - E_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = 0$$

- Rozwiązujemy układ równań (dla sytuacji z rysunku mamy 3 równania na trzy nieznane prądy).

$$i_1 = \frac{E_1 R_3 - E_2 R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3}, i_2 = \frac{E_1 R_1 + E_2 R_1 + E_1 R_3}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3}, i_3 = -\frac{E_1 R_1 + E_2 R_1 + E_2 R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3}$$

Zastosowania praw Kirchhoffa: parametry zastępcze

- Przy łączeniu szeregowym



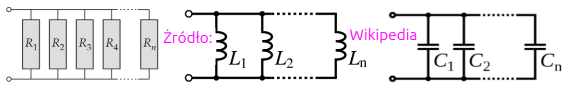
prąd w każdym elemencie jest jednakowy a napięcia się sumują (DPK):

$$u_k(t) = R_k i(t) \quad || \quad u_k(t) = L_k \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \quad || \quad u_k(t) = \frac{1}{C_k} \int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

rezystancja/indukcyjność/pojemność zastępcza wynosi więc

$$R_{tot} = \sum_{k=1}^{n} R_k \quad || \quad L_{tot} = \sum_{k=1}^{n} L_k \quad || \quad \frac{1}{C_{tot}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

- Przy łączeniu równoległym



napięcie na każdym elemencie jest jednakowe a prądy się sumują (PPK):

$$i_k(t) = \frac{1}{R_k} u(t) \quad || \quad \frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L_k} u(t) \quad || \quad i_k(t) = C_k \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

w efekcie rezystancja/indukcyjność/pojemność zastępcza to

$$\frac{1}{R_{tot}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \quad || \quad \frac{1}{L_{tot}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k} \quad || \quad C_{tot} = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

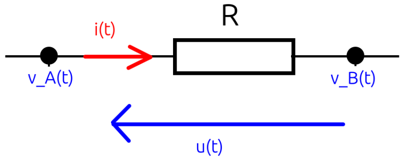
Twierdzenie Tellegena

- Niech $u_{\mathscr{X}} = v_{1\mathscr{X}} - v_{2\mathscr{X}}$ będzie napięciem na zaciskach 1 i 2 elementu $\mathscr{X}$ obwodu. Niech $i_{\mathscr{X}}$ będzie prądem płynącym przez $\mathscr{X}$ od zacisku 2 do zacisku 1. Wtedy

$$\sum_{\mathscr{X}} u_{\mathscr{X}} i_{\mathscr{X}} = 0,$$

  gdzie suma przebiega po wszystkich elementach obwodu.
- Inaczej mówiąc: suma mocy wydzielonych na wszystkich elementach obwodu jest równa zero.
- Twierdzenie Tellegena wyraża zasadę zachowania energii dla obwodów elektrycznych.
- Działa dla obwodów z elementami nieidalnymi i nieliniowymi.

Moc rezystora: prawo Joule'a



$$(v_A - v_B)\, i_{AB} = \left(+\, i(t)\, R\right) \cdot \left(-\, i(t)\right) = -R\, i(t)^2 = -p_R(t)$$

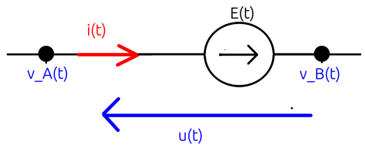
- $R > 0$ więc $p_R > 0$
- Znak ma znaczenie w sumie w twierdzeniu Tellegena
- Znaki mocy innych elementów będziem interpretować w odniesieniu do ujemnej mocy na oporniku
- Ujemny znak inerpetujemy jako pobieranie energii (np. ze źródeł)
- Wzór na $p_R(t)$ wyjaśnia doświadczalnie zaobserwowane prawo Joule'a (1841)

  Ilość ciepła wydzielanego na oporniku w jednostce czasu jest iloczynem jego rezystancji i kwadratu natężenia prądu.

- Alternatywny wzór

$$p_R(t) = \frac{u(t)^2}{R}$$

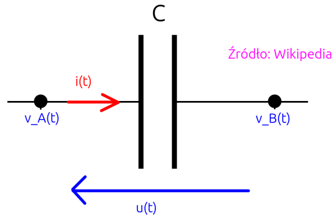
Moc źródła napięciowego



$$(v_A - v_B)\, i_{AB} = \big(-E(t)\big) \cdot \big(-i(t)\big) = E(t)i(t) = +p_E(t)$$

- Zwykle, zwrot prądu płynącego przez źródło taki sam jak zwrot napięcia na źródle (np. w obwodzie jedno-oczkowym z jednym źródłem)
- Dla konfiguracji z rysunku mamy w takiej sytuacji $p_E(t) > 0$

Moc kondensatora

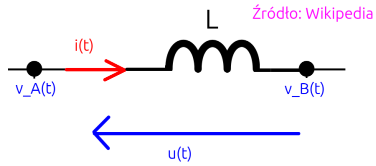


$$(v_A - v_B)\, i_{AB} = u(t) \cdot (-i(t)) = -u(t)\, C\, \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \frac{1}{2} C\, u(t)^2 \right\}$$

- moc wydzielona na kondensatorze jest pochodną funkcji **stanu układu**: kondensator, w odróżnieniu od rezystora, jest układem zachowawczym.
- gdy $|u(t)|$ rośnie, kondensator daje ujemny wkład do sumy, pobierając energię (podobnie jak opornik)
- gdy $|u(t)|$ maleje, kondensator daje dodatni wkład do sumy, oddając energię (podobnie jak źródło)
- energia zmagazynowana w polu elektrycznym kondensatora to

$$\mathscr{E}_C = \frac{1}{2} C\, u(t)^2$$

Moc cewki



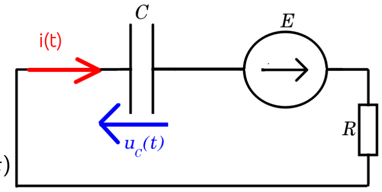
$$(v_A - v_B)\, i_{AB} = (-i(t)) \cdot u(t) = -i(t)\, L\, \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2} L\, i(t)^2\right\}$$

- cewka, podobnie jak kondensator jest układem zachowawczym.
- gdy $|i(t)|$ rośnie, cewka pobiera energię z obwodu
- gdy $|i(t)|$ maleje, cewka oddaje energię
- energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki to

$$\mathscr{E}_L = \frac{1}{2} L\, i(t)^2$$

- cewki są używane do zapobieganie gwałtownym zmianom natężenia prądu

Ładowanie/rozładowywanie kondensatora



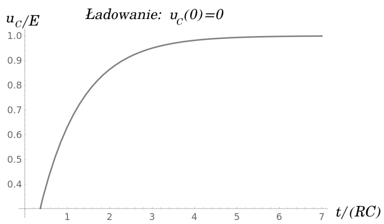
- Obwód RC ze źródłem stałego napięcia E.
- DPK daje równanie różniczkowe liniowe na $u_C(t)$

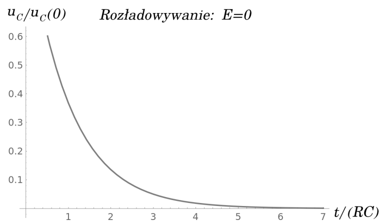
$$E = i(t)R + u_C(t), \qquad i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

- Rozwiązanie ogólne zależy od jednej stałej dowolnej: początkowego napięcia na kondensatorze $u_C(0)$

$$u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) + u_C(0)\,\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\,\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \frac{u_C(0)}{R}\,\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

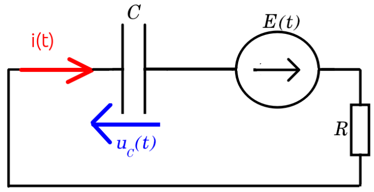




Napięcie sinusoidalne

- Napięcie sinusoidalne ma postać (ω , φ, U_{max}, to stałe współczynniki)
$$u(t) = U_{max} sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$
- Zależność $u(t)$ jest funkcją okresową (periodyczną), tj. $u(t + T) = u(t)$; okres podstawowy T spełnia warunek $\omega T = 2\pi$ tj.
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
- Liczbę pełnych drgań (okresów) przypadających na jednostkę czasu nazywamy częstością (częstotliwością)
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$
Jednostką częstości jest herc, $1Hz = 1s^{-1}$
- Wielkość $\omega = 2\pi\nu$ nazywamy częstością kołową (pulsacją);
- U_{max} to amplituda napięcia
- Funkcję $\phi(t) = \omega t + \varphi$ nazywamy fazą napięcia, φ to faza początkowa
- Sieć niskiego napięcia w Europie ma $U_{max} = \sqrt{2} \cdot 230$V oraz $\nu = 50Hz$
- W ogólności, prąd opdpowiadający napięciu (1) ma postać
$$i(t) = \mathcal{I}_{max} sin(\omega t)$$
- φ to różnica faz między napięciem a natężeniem
- jeśli $\varphi \in (0, \pi]$ napięcie wyprzedza prąd w fazie o φ
- jeśli $\varphi \in (-\pi, 0)$ napięcie opóźnia się w fazie względem prądu.

Dwójnik RC w obecnosci źródła napięcia sinusoidalnego



- Napięcie sinusoidalne
$$E(t) = E_{max} sin(\omega t)$$
- Równanie na $u_C(t)$
$$E_{max}\sin(\omega t) = i(t)R + u_C(t), \qquad i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$
- szukamy rozwiązania szczególnego o postaci
$$u_C(t) = -\frac{\mathcal{I}_{max}}{C\,\omega}\cos(\omega t - \varphi), \qquad \text{tj.} \qquad i(t) = \mathcal{I}_{max}\sin(\omega t - \varphi)$$
- wstawiając do równania [$\sin(\omega t) = \sin(\omega t - \varphi + \varphi)$]
$$E_{max}\sin(\omega t - \varphi)\cos(\varphi) + E_{max}\cos(\omega t - \varphi)\sin(\varphi) = \mathcal{I}_{max}R\sin(\omega t - \varphi) - \frac{\mathcal{I}_{max}}{C\,\omega}\cos(\omega t - \varphi),$$
- co będzie spełnione, jeśli
$$E_{max}\cos(\varphi) = \mathcal{I}_{max}R, \qquad E_{max}\sin(\varphi) = -\frac{\mathcal{I}_{max}}{C\,\omega},$$
- równoważnie
$$\mathcal{I}_{max} = \frac{E_{max}}{\sqrt{R^2 + (C\,\omega)^{-2}}}\,, \qquad \cos(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (C\,\omega)^{-2}}}\,, \qquad \sin(\varphi) = -\frac{(C\,\omega)^{-1}}{\sqrt{R^2 + (C\,\omega)^{-2}}}$$
- W obwodach prądu sinusoidalnego zawierających kondensatory i/lub cewki, napięcie jest przesunięte w fazie względem natężenia prądu

Moc w obwodach prądu sinusoidalnego

- Przyjmijmy, że prąd i napięcie na dwójniku mają postać

$$u(t) = U_{max} sin(\omega t + \varphi)\,, \qquad i(t) = \mathcal{I}_{max} sin(\omega t)$$

- moc chwilowa na dwójniku

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_{max}\mathcal{I}_{max} sin(\omega t + \varphi) sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} U_{max}\mathcal{I}_{max} \left\{\cos\varphi - \cos(2\omega\, t + \varphi)\right\} \end{aligned}$$

- moc chwilowa oscyluje z częstością kołową 2ω
- amplituda oscylacji $p(t)$ nazywa się **mocą pozorną** $S = \frac{1}{2} U_{max}\mathcal{I}_{max}$
- $p(t)$ oscyluje wokół wartości nazywanej **mocą czynną**

$$P = \frac{1}{2} U_{max}\mathcal{I}_{max} \cos\varphi$$

- ogólniej, dla dowolnych prądów okresowych, moc czynną definiujemy jako

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{gdzie} \quad T \quad \text{jest okresem}$$

- Dla prądów sinusoidalnych $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Moc w obwodach prądu sinusoidalnego II

- moc chwilową można też przedstawić w postaci

$$p(t) = u(t)i(t) = U_{max}\mathcal{I}_{max} sin(\omega t + \varphi) sin(\omega t)$$
$$= \frac{1}{2}U_{max}\mathcal{I}_{max}\cos\varphi\,\{1 - \cos(2\omega\, t)\} + \frac{1}{2}U_{max}\mathcal{I}_{max}\sin\varphi\,\sin(2\omega\, t)$$

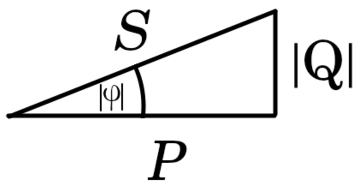
- pierwszy składnik jest nieujemny i jego średnia w okresie jest mocą czynną
- drugi składnik oscyluje wokół zera z amplitudą

$$Q = \frac{1}{2}U_{max}\mathcal{I}_{max}\sin(\varphi)$$

  nazywaną **mocą bierną**
- moc bierna jest miarą ocylacji energii między elementami zachowawczymi dwójnika a resztą obwodu
- moc czynna na dwójniku złożonym z elementów pasywnych jest mocą wydzielaną na rezystancjach

Moc w obwodach prądu sinusoidalnego IV

- trójkąt mocy



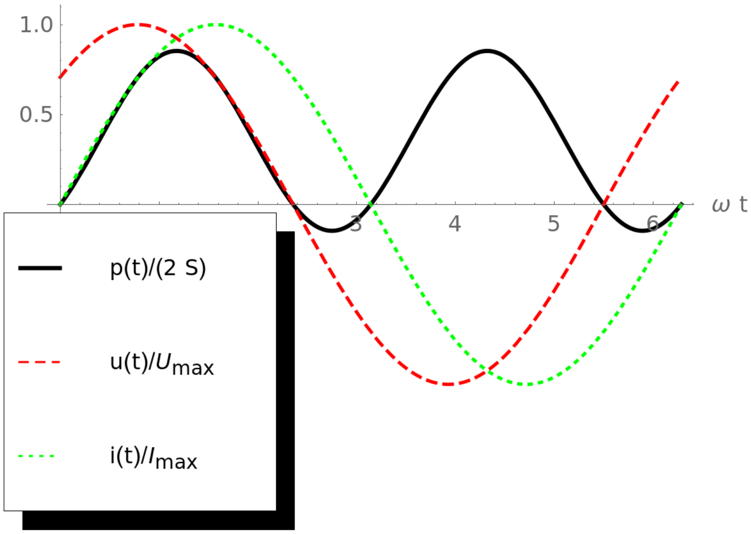
$$P = \frac{1}{2} U_{max} \mathcal{I}_{max} \cos \varphi \,, \qquad Q = \frac{1}{2} U_{max} \mathcal{I}_{max} \sin(\varphi) \,, \qquad S = \frac{1}{2} U_{max} \mathcal{I}_{max}$$

- stosunek mocy czynnej do pozornej, $\cos \varphi$, to **współczynnik mocy**
- dla idealnego rezystora $\cos \varphi = 1$
- jednostką mocy czynnej jest wat $1W = 1V \cdot 1A$
- jednostką mocy pozornej jest woltoamper $1VA = 1V \cdot 1A$
- jednostką mocy biernej (*reactive power*) jest war, $1var = 1V \cdot 1A$ (*volt-ampere reactive*)

Moc w obwodach prądu sinusoidalnego III

- Wykres mocy chwilowej dla $\varphi = \pi/4$

$$u(t) = U_{max} sin(\omega t + \varphi)\,, \qquad i(t) = \mathcal{I}_{max} sin(\omega t)\,, \qquad p(t) = u(t)i(t)$$



Wartości skuteczne

- Dla prądów periodycznych o okresie T wartość skuteczną (RMS, *root mean square*) natężenia i napięcia definiujemy jako
$$\mathcal{I}_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T i(t)^2\,\mathrm{d}t}\,, \qquad U_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t}\,,$$
- Dla idealnego rezystora liniowego mamy $u(t) = R\,i(t)$ oraz
$$p_R(t) = R\,i(t)^2 = \frac{u(t)^2}{R}$$
- Dla prądów okresowych, moc czynną na oporniku
$$P_R = \frac{1}{T}\int\limits_0^T p_R(t)\mathrm{d}t,$$
można przedatawić jako
$$P_R = R\,\mathcal{I}_{sk}^2 = \frac{U_{sk}^2}{R}$$
- Wartości skuteczne $\mathcal{I}_{sk}$ i U_{sk} często oznacza się $\mathcal{I}$ i U

Wartości skuteczne prądów sinusoidalnych

- Dla prądów sinusoidalnych

$$u(t) = U_{max}\sin(\omega t + \varphi_u)\,, \qquad i(t) = \mathcal{I}_{max}\sin(\omega t + \varphi_i)\,, \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

wartości skuteczne wynoszą [$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$]

$$\mathcal{I}_{sk} = \frac{\mathcal{I}_{max}}{\sqrt{2}}\,, \qquad U_{sk} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

- moc czynna (P), bierna (Q) i pozorna (S) mają w tym przypadku postać

$$P = U_{sk}\mathcal{I}_{sk}\cos\varphi\,, \qquad Q = U_{sk}\mathcal{I}_{sk}\sin(\varphi)\,, \qquad S = U_{sk}\mathcal{I}_{sk}$$