Przykład: pole sfery jednorodnie naładowanej

- Sfera ma promień a i gęstość powierzchniową σ (jeszcze^n raz)
- Ładunek ma symetrię sferyczną $\Rightarrow$ potencjał też (całka)
- Z równania Laplace'a

$$\tilde{\varphi}(r) = \begin{cases} -\frac{C_1}{r} + C_2 & \text{dla} \quad r < a \\ -\frac{C_3}{r} + C_4 & \text{dla} \quad r > a \end{cases}$$

- Sfera pusta w środku $\Rightarrow$ $\boxed{C_1 = 0}$
- Punkt odniesienia $\tilde{\varphi}(\infty) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{C_4 = 0}$
- Ciągłość potencjału $\Rightarrow$ $\boxed{C_2 = -C_3/a}$
- Pole elektrostatyczne
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) = -\tilde{\varphi}'(r)\,\frac{\vec{r}}{r} = \begin{cases} \vec{0} & \text{dla} \quad r < a \\ -\frac{C_3}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} & \text{dla} \quad r > a \end{cases}$$
- Warunek brzegowy dla $\vec{E}$

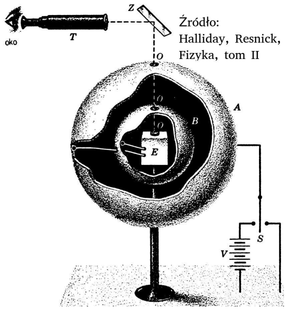
$$-\frac{C_3}{a^2}\,\frac{\vec{r}}{a} - \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{a} \qquad \forall_{\vec{r} \in \mathrm{Sfera}(a)}$$

- Stąd: $\boxed{-C_3 = \sigma\, a^2/\varepsilon_0 = k_e Q_{\mathrm{Sfery}}}$

Przewodniki metaliczne

- W metalach elektrony walencyjne mogą się przemieszczać między węzłami sieci krystalicznej w całej objętości. Dzięki obecności tych tzw. elektronów swobodnych, metale są dobrymi przewodnikami elektrycznymi.
- Po wprowadzeniu ładunku na izolowany przewodnik metaliczny, powstałe w nim pole elektryczne działa na swobodne elektrony powodując ich ruch. W krótkim czasie ustala się stan równowagi, w którym pole elektryczne wszędzie wewnątrz przewodnika znika.
- Z prawa Gaussa wynika, że gęstość ładunku wewnątrz przewodnika jest wówczas zerowa, tj. ładunek umieszczony na przewodniku izolowanym rozkłada się tylko na jego zewnętrznej powierzchni.
- Fakt ten jest sprawdzony doświadczalnie z dużą dokładnością, potwierdzając prawa Gaussa i Coulomba.

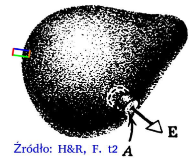
Przewodniki: sprawdzanie prawa Gaussa



Źródło:
Halliday, Resnick,
Fizyka, tom II

- Czuły miernik natężenia prądu elektrycznego E pozwala wykryć nawet niewielkie przepływy ładunku między zewnętrzną A i wewnętrzną B metalową powłoką sferyczną.
- Wskazania miernika obserwuje się za pomocą okienek O
- Przełącznik S pozwala na przemian łączyć zewnętrzną powłokę z baterią (powodując napływ na nią ładunku) i uziemieniem.
- W doświadczeniu nie obserwuje się przepływu ładunku na wewnętrzną powłokę metalową.

Przewodniki: warunki brzegowe



Źródło: H&R, F. t2

- Znikanie pola wewnątrz oznacza, że w stanie równowagi pole tuż przy zewnętrznej powierzchni wyraża się przez powierzchniową gęstość ładunku $\sigma(\vec{r})$

$$\vec{E}_{zew}(\vec{r}) = \vec{n}_{zew}(\vec{r})\,\sigma(\vec{r})/\varepsilon_0$$

  gdzie wersor normalny $\vec{n}_{zew}(\vec{r})$ jest zwrócony na zewnątrz obszaru przewodnika.
- Powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną.
- Alternatywny wzór (w zgodzie z prawem Gaussa)

$$\vec{E}_{zew}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{zew}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})/\varepsilon_0 \tag{21}$$

- Gęstość $\sigma(\vec{r})$ jest zwykle różna w różnych punktach powierzchni przewodnika.

Twierdzenie o jednoznaczności

- Niech D będzie obszarem przestrzeni, który powstaje z całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ poprzez wycięcie $n+m$ obszarów ograniczonych, których brzegami są powierzchnie zamknięte $P_1^1, \ldots, P_n^1$ oraz $P_1^2, \ldots, P_m^2$ [fizycznie reprezentują one powierzchnie przewodników].
- Załóżmy, że na każdej powierzchni $P_1^1, \ldots, P_n^1$ potencjał elektrostatyczny $\varphi(\vec{r})$ ma zadaną stałą wartość.
- Załóżmy, że na każdej powierzchni $P_1^2, \ldots, P_m^2$ potencjał $\varphi(\vec{r})$ ma nieustaloną ale stałą wartość, oraz zadany strumień gradientu $\varphi(\vec{r})$ przez tę powierzchnię [tj. zadany całkowity ładunek na przewodniku].
- Załóżmy też, że potencjał elektrostatyczny $\varphi(\vec{r})$ znika w nieskończoności co najmniej jak $1/|\vec{r}|$ a jego gradient jak $1/|\vec{r}|^2$ **lub**, że sam obszar D ograniczony jest powierzchnią zamkniętą, na której potencjał jest stały i zadany **lub** stały i nieustalony, ale zadany jest strumień gradientu $\varphi(\vec{r})$ przez tę powierzchnię [fizycznie oznacza to, że rozpatrujemy rozkład ładunków umieszczonych **wewnątrz** wydrążonego przewodnika, por. wzór (21)].
- Przy powyższych warunkach brzegowych, rozwiązanie $\varphi(\vec{r})$ równania Poissona $\Delta\varphi(\vec{r}) = -\varrho(\vec{r})/\varepsilon_0$, przy zadanej gęstości ładunku $\varrho(\vec{r})$ w obszarze D jest wyznaczone z dokładnością do co najwyżej jednej stałej addytywnej [jeśli wartość potencjału na dowolnej powierzchni lub w nieskończoności jest zadana, rozwiązanie jest jednoznaczne; w każdym przypadku pole elektrostatyczne jest wyznaczone jednoznacznie].
- Twierdzenie o jednoznaczności jest ważne, bo pozwala zgadywać rozwiązania problemów elektrostatycznych.

Twierdzenie o jednoznaczności: dowód

- Jeśli D jest obszarem nieograniczonym, niech D_R będzie obszarem, który jest częścią wspólną D i kuli o promieniu R we wnętrzu której znajdują się wszystkie powierzchnie P_i^1 oraz P_j^2. Jeśli obszar D sam jest ograniczony powierzchnią przewodzącą, D_R oznacza po prostu D w poniższych wzorach.
- Przypuśćmy, że funkcje $\varphi_1(\vec{r})$ i $\varphi_2(\vec{r})$ są dwoma rozwiązaniami równania równania Poissona z tą samą gęstością ładunku, spełniającymi zadane (takie same) warunki brzegowe. Pokażemy, że odpowiadające im pola elektrostatyczne $\vec{E}_1 = -\mathrm{grad}\,\varphi_1$ i $\vec{E}_2 = -\mathrm{grad}\,\varphi_2$ są jednakowe tj. w każdym punkcie $\vec{r}$ przestrzeni $\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_2(\vec{r})$.
- Niech $\varphi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})$ oraz $\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) - \vec{E}_2(\vec{r})$
- Pole $\varphi(\vec{r})$ spełnia równanie Laplace'a, co więcej na każdej z powierzchni przewodzących znika albo potencjał $\varphi(\vec{r})$ albo strumień pola $\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})$ przez tę powierzchnię.
- Dla każdego pola skalarnego $\mathcal{S}(\vec{r})$ i każdego pola wektorowego $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})$ zachodzi łatwa do sprawdzenia tożsamość
$$\mathrm{div}\Big\{\mathcal{S}(\vec{r})\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})\Big\} = \mathcal{S}(\vec{r})\ \mathrm{div}\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{V}}(\vec{r})\cdot \mathrm{grad}\mathcal{S}(\vec{r})$$
- Zastosujmy tę tożsamość do pól $\mathcal{S}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$ oraz $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})$:
$$|\vec{E}(\vec{r})|^2 = -\vec{E}(\vec{r})\cdot \mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})\ \mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) - \mathrm{div}\Big\{\varphi(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\Big\}$$
- Potencjał $\varphi(\vec{r})$ spełnia równanie Laplace'a więc $\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = -\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$; ostatecznie dostajemy
$$|\vec{E}(\vec{r})|^2 = -\mathrm{div}\Big\{\varphi(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\Big\}$$

Twierdzenie o jednoznaczności: dowód

- Całkując ostatnią tożsamość po obszarze D_R dostajemy (korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego)

$$\iiint_{D_R} |\vec{E}(\vec{r})|^2 \mathrm{d}_{\vec{r}} V =$$

$$= -\oiint_{S_R} \varphi(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(r) \mathrm{d}_{\vec{r}} S - \sum_i \oiint_{P_i^1} \varphi(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(r) \mathrm{d}_{\vec{r}} S - \sum_j \oiint_{P_j^2} \varphi(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(r) \mathrm{d}_{\vec{r}} S$$

- Na powierzchniach P_i^1 potencjał φ znika, więc całki po tych powierzchniach znikają.
- Całki po powierzchniach P_j^2 również znikają, gdyż potencjał φ jest na nich stały, a strumień pola $\vec{E}$ przez każdą z tych powierzchni jest zerowy.
- Jeśli obszar D jest ograniczony, S_R jest brzegiem obszaru D, czyli powierzchnią przewodzącą tego samego typu co P_i^1 lub P_j^2, zatem całka po S_R znika.
- Jeśli obszar D jest nieograniczony, S_R jest powierzchnią kuli o promieniu R. Zgodnie z założeniem o zachowaniu potencjału w nieskończoności, jeśli R jest dostatecznie duże, potencjał φ ma na tej sferze wartość rzędu $1/R$ a pole $\vec{E}$ ma wartość $1/R^2$. Strumień $\varphi\vec{E}$ przez powierznię sfery jest zatem rzędu $1/R$ i dąży do zera w granicy $R \to \infty$.
- Ostatecznie stwierdzamy, że całka potrójna z $|\vec{E}(\vec{r})|^2$ po całym obszarze D znika, więc pole $\vec{E}(\vec{r})$ znika w każdym punkcie tego obszaru.

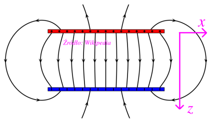
Przewodniki metaliczne: przykład

- Na metalową kulę o promieniu a wprowadzono ładunek Q. Wyznaczyć potencjał w całej przestrzeni.
- Dla sfery naładowanej jednorodnie z gęstością $\sigma = Q/(4\pi\, a^2)$ znaleźliśmy rozwiązanie r. Laplace'a

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} k_e Q/a & \text{dla} \quad r < a \\ \frac{k_e Q}{r} & \text{dla} \quad r > a \end{cases} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{dla} \quad r < a \\ \frac{k_e Q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} & \text{dla} \quad r > a \end{cases}$$

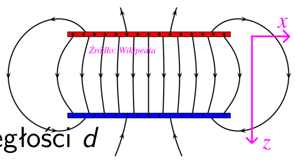
- Powyższe rozwiązanie jest zgodne z warunkami zadania.
- Czy ładunek może rozmieścić się na kuli w inny sposób?
- **Nie.** W obecności przewodników metalicznych o zadanych potencjałach lub ładunkach (oraz, ewentualnie, zadanych ładunków punktowych, objętościowych etc.) pole elektrostatyczne jest wyznaczone jednoznacznie.

Kondensatory



- Kondensatorem nazywamy dwa przewodniki (zwane okładkami kondensatora), na które wprowadzono równe co do wartości bezwględnej ładunki elektryczne o przeciwnych znakach.
- W praktyce, aby wytworzyć takie ładunki wystarczy chwilowo połączyć okładki kondensatora z baterią (ZZŁ); po odłączeniu baterii, ładunki pozostaną na okładkach.
- Ładunek pojawiający się na każdej z okładek jest wprost proporcjonalny do różnicy potencjałów elektrostatycznych między okładkami (tw. o jednoznaczności).
- Współczynnik proporcjonalności nazywamy **pojemnością kondensatora** $\mathcal{C}$
$$\mathcal{C} = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q_1}{\mathcal{U}}$$
gdzie Q_1 jest ładunkiem na okładce o potencjale φ_1.
- Jednostką pojemności jest farad: $1F = \frac{1C}{1V}$.

Przykład: kondensator płaski



- Dwie równoległe metalowe płyty o odległości d (małej w porównaniu z ich rozmiarami).
- Pole każdej płyty przybliżamy przez pole jednorodnie naładowowanej płaszczyzny (w zgodzie ekwipotencjalnością).
- W obszarze zewnętrznym pola obu płaszczyzn znoszą się.
- Między okładkami pola się dodają: wypadkowego pole to

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{S\varepsilon_0}\vec{k} = -\mathrm{grad}(-\frac{q}{S\varepsilon_0}z)$$

  gdzie S to pole powierzchni okładek, a q – ładunek okładki $z = 0$.
- Pojemność kondensatora płaskiego wynosi

$$\mathcal{C} = \frac{q}{\varphi\big|_{z=0} - \varphi\big|_{z=d}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Przykład: kondensator kulisty

- Kondensator kulisty składa się z dwóch cienkich współśrodkowych metalowych sfer o promieniach R_w i $R_z > R_w$.
- Niech q będzie ładunkiem na sferze wewnętrznej, a $-q$ – na zewnętrznej.
- Załóżmy, że potencjał elektrostatyczny w obszarze między sferami dany jest wzorem (powiedzmy, że środki sfer są w $\vec{r} = 0$)
$$\varphi(\vec{r}) = k_e \frac{q}{|\vec{r}|}$$
- Powyższa funkcja spełnia równanie Laplace'a i warunki brzegowe na każdej ze sfer (w przypadku sfery zewnętrznej korzystamy ze wzoru (21) scałkowanego po jej powierzchni) , więc jest jedynym rozwiązaniem naszego problemu.
- Pojemność kondensatora kulistego wynosi
$$\mathcal{C} = 4\pi\varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{R_w} - \frac{1}{R_z} \right\}^{-1}$$