Dielektryki (izolatory)

- Potencjał dipola umieszczonego w $\vec{r} = \vec{0}$.

$$\varphi_{\text{dipol}}(\vec{R}\,) = k_e \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{|\vec{R}\,|^3}$$

- Potencjał wytwarzany przez spolaryzowany dielektryk

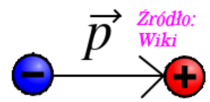
$$\varphi_{\text{polaryzacja}}(\vec{R}\,) = k_e \iiint\limits_{\text{Dielektryk}} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,) \cdot \left\{\vec{R} - \vec{r}\,\right\}}{|\vec{R} - \vec{r}\,|^3} \mathrm{d}_{\vec{r}} V$$

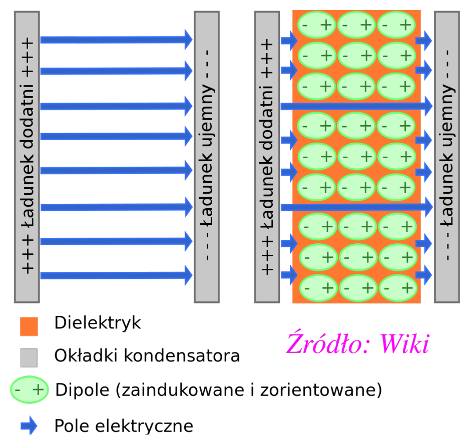
- Potencjał $\varphi_{\text{polaryzacja}}$ jest taki sam jak potencjał wytwarzany przez **ładunki związane** znajdujące się w obszarze dielektryka i na jego powierzchni

  $$\rho_{zw}(\vec{r}\,) = -\mathrm{div} \vec{P}(\vec{r}\,)\,, \qquad \sigma_{zw}(\vec{r}\,) = +\vec{P}(\vec{r}\,) \cdot \vec{n}_{\text{zewn}}(\vec{r}\,)\,,$$

  gdzie $n_{\text{zewn}}(\vec{r}\,)$ jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni dielektryka w punkcie $\vec{r}$, pokazującym na zewnątrz dielektryka.
- Znaki: zwrot momentu dipolowego + tw. GO.

Ładunki związane: $\sigma_{zw}(\vec{r}) = +\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{\mathrm{zewn}}(\vec{r})$





Gęstość ładunków związanych: sprawdzenie

- $\mathrm{grad}_{\vec{r}}$ oznacza gradient względem zmiennej $\vec{r}$ (zamiast np. $\vec{R}$). Zachodzi wzór
$$\mathrm{grad}_{\vec{r}}\left\{\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}\right\} = \frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}$$
- Potencjał wytwarzany przez spolaryzowane ciało

$$\varphi(\vec{R}) = k_e \iiint\limits_{\text{Ciało}} \frac{\vec{P}(\vec{r})\cdot\left\{\vec{R}-\vec{r}\right\}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}\mathrm{d}_{\vec{r}}V = k_e \iiint\limits_{\text{Ciało}} \vec{P}(\vec{r})\cdot\mathrm{grad}_{\vec{r}}\left\{\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}\right\}\mathrm{d}_{\vec{r}}V$$

- Znana tożsamość:
$\mathrm{div}\left\{\mathcal{S}(\vec{r})\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})\right\} = \mathcal{S}(\vec{r})\,\mathrm{div}\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{V}}(\vec{r})\cdot\mathrm{grad}\mathcal{S}(\vec{r})$
- Potencjał $\varphi(\vec{R})$ można teraz przedstawić jako:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{R}) &= k_e \iiint\limits_{\text{Ciało}} \mathrm{div}_{\vec{r}}\left\{\frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|}\right\}\mathrm{d}_{\vec{r}}V - k_e \iiint\limits_{\text{Ciało}} \frac{\mathrm{div}\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|}\mathrm{d}_{\vec{r}}V \\ &= k_e \iint\limits_{\text{Pow.ciała}} \frac{\vec{P}(\vec{r})\cdot\vec{n}_{\text{zewn}}(\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|}\mathrm{d}_{\vec{r}}S - k_e \iiint\limits_{\text{Ciało}} \frac{\mathrm{div}\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|}\mathrm{d}_{\vec{r}}V\end{aligned}$$

Gęstość ładunków związanych: sprawdzenie

$$\varphi(\vec{R}) = k_e \iint\limits_{\text{Pow.ciała}} \frac{\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{\text{zewn}}(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} \mathrm{d}_{\vec{r}} S - k_e \iiint\limits_{\text{Ciało}} \frac{\mathrm{div} \vec{P}(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} \mathrm{d}_{\vec{r}} V$$

- jest to potencjał ładunków objętościowych i powierzchniowych o rozkładzie podanym wcześniej.
- Jeśli $\vec{R}$ jest wewnątrz ciała, powyższy wzór pozostaje w mocy dla potencjału $\varphi(\vec{R})$ pola makroskopowego (przestrzennie uśrednionego).
- Ładunki związane są makroskopowym przejawem polaryzacji.

Kula o promieniu a i jednorodnej polaryzacji $\vec{P}$

- Przypomnienie: pole kuli jednorodnie naładowanej

$$\vec{E}(\vec{R}\,) = k_e\, Q\, \frac{\vec{R}}{|\vec{R}\,|^3}\ \text{[na zewn.]} \qquad \vec{E}(\vec{R}\,) = k_e\, Q\, \vec{R}/a^3\ [\textit{wewn.}]$$

- Potencjał kuli jednorodnie spolaryzowanej

$$\varphi(\vec{R}\,) = k_e \iiint\limits_{\text{Kula}} \frac{\vec{P}\cdot\left\{\vec{R}-\vec{r}\right\}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}\mathrm{d}_{\vec{r}}V$$

- Wprowadzając moment dipolowy kuli $\vec{p} = (4\pi a^3/3)\vec{P}$

$$\varphi(\vec{R}\,) = k_e \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{|\vec{R}\,|^3}\ \text{[na zewn.]} \qquad \varphi(\vec{R}\,) = k_e\, \vec{p}\cdot\vec{R}/a^3\ [\textit{wewn.}]$$

- Pole na zewnątrz wygląda jak pole idealnego dipola umieszczonego w środku kuli.
- Pole elektryczne $\vec{E}$ wewnątrz jest jednorodne.

Kula o promieniu a i jednorodnej polaryzacji $\vec{P}$

$$\varphi(\vec{R}) = k_e \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \text{ [na zewn.]} \qquad \varphi(\vec{R}) = k_e\, \vec{p}\cdot\vec{R}/a^3 \text{ [}wewn.\text{]}$$

$$\vec{E}_{\text{zewn}}(\vec{r}) = +k_e \frac{1}{|\vec{r}|^3}\left(3\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^2}\vec{r} - \vec{p}\right) \qquad \vec{E}_{wewn}(\vec{r}) = -k_e\, \vec{p}/a^3$$

- Pole na zewnątrz i pole wewnątrz mają zerową dywergencję, tj. nie ma objętościowych ładunków związanych.
- Powierzchniowa gęstość ładunków związanych (warunki brzegowe), $|\vec{r}| = a$

  $$\sigma(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{zewn}}(\vec{r})\cdot\vec{r}/a - \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{wewn}}(\vec{r})\cdot\vec{r}/a = 3\varepsilon_0 k_e\, \vec{p}\cdot\vec{r}/a^4 = \vec{P}\cdot\vec{r}/a$$

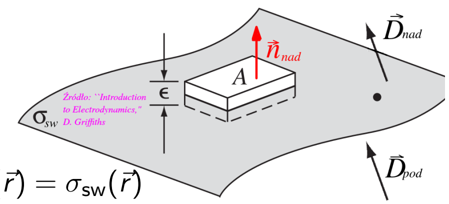
  w zgodzie z ogólnym wzorem na powierzchniowe ładunki związane.

Pole indukcji elektrycznej $\vec{D}$

- Definicja
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$
- Dywergencja pola $\vec{D}$
$$\mathrm{div}\vec{D} = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\vec{E} + \mathrm{div}\vec{P} = \varrho - \varrho_{\mathrm{zw}} = \varrho_{sw}$$
- ϱ_{sw} to gęstość ładunków swobodnych.
- Ładunki swobodne to wszystkie ładunki, które nie są przejawem istnienia polaryzacji.
- Prawo Gaussa w dielektrykach (w materii)
$$\mathrm{div}\vec{D} = \varrho_{sw}$$
- Wersja całkowa (tw. GO)
$$\oiint_S \vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{n}_{zew}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S = Q_{sw}^{wew}$$

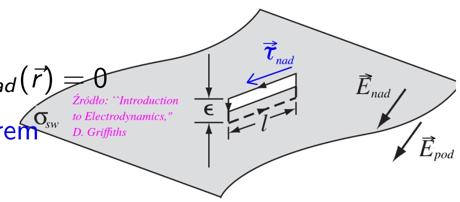
  gdzie Q_{sw}^{wew} jest ładunkiem swobodnym w obszarze ograniczonym powierzchnią S

Warunki brzegowe w obecności dielektryków



Z prawa Gaussa w wersji całkowej:

$$\vec{D}_{nad}(\vec{r})\cdot\vec{n}_{nad}(\vec{r})-\vec{D}_{pod}(\vec{r})\cdot\vec{n}_{nad}(\vec{r})=\sigma_{\mathrm{sw}}(\vec{r})$$



Znikanie całki $\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$\vec{E}_{nad}(\vec{r})\cdot\vec{\tau}_{nad}(\vec{r})-\vec{E}_{pod}(\vec{r})\cdot\vec{\tau}_{nad}(\vec{r})=0$$

gdzie $\vec{\tau}_{nad}(\vec{r})$ jest dowolnym wektorem stycznym do powierzchni w $\vec{r}$

Zwrot $\vec{n}_{nad}(\vec{r})$: od "pod" do "nad"

Potencjał: $\varphi(\vec{r}_2)-\varphi(\vec{r}_1)=-\int\limits_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$\varphi_{nad}(\vec{r})-\varphi_{pod}(\vec{r})=0 \qquad (|\vec{E}(\vec{r})|<\infty)$$

Dielektryki liniowe i izotropowe

- Dla wielu dielektryków, jeśli pole $\vec{E}$ nie jest zbyt silne, polaryzacja jest proporcjonalna do pola $\vec{E}$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

- Bezwymiarowy współczynnik χ_e to podatność elektryczna.
- Względna przznikalność elektryczna ośrodka ε_r to

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

- Przenikalność elektryczna ośrodka ε to

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

- Dla pola indukcji elektrycznej

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

- W obszarach gdzie ε_r nie zależy od położenia zachodzi

$$\mathrm{div} \vec{E} = \varrho_{\mathsf{sw}} / (\varepsilon_0 \varepsilon_r)$$

ε_r (źródło: Wikipedia)

Relative permittivities of some materials at room temperature under 1 kHz

Material	ε_r
Vacuum	1 (by definition)
Air	1.000 589 86 ± 0.000 000 50 (at STP, 900 kHz),[1]
PTFE/Teflon	2.1
Graphite	10–15
Silicone rubber	2.9–4[7]
Silicon	11.68
GaAs	12.4[8]
Silicon nitride	7–8 (polycrystalline, 1 MHz)[9][10]
Ammonia	26, 22, 20, 17 (−80, −40, 0, +20 °C)
Methanol	30
Ethylene glycol	37
Furfural	42.0
Glycerol	41.2, 47, 42.5 (0, 20, 25 °C)
Water	87.9, 80.2, 55.5 (0, 20, 100 °C)[11] for visible light: 1.77

Przykład: Ładunek punktowy Q w środku kuli dielektrycznej o promieniu a i względnej przenikalności ε_r.

- Układ ma symetrię sferyczną
- Z prawa Gaussa:
$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$
- Pole elektryczne wewnątrz kuli ($|\vec{r}| < a$)
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_r}k_e\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$
- Na zewnątrz kuli ($|\vec{r}| > a$)
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}(\vec{r}) = k_e\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Wytrzymałość dielektryczna

- W dostatecznie silnym polu elektrycznym, dielektryk traci właściwości izolacyjne i dochodzi do przebicia.
- Maksymalna wartość pola $\vec{E}$, przy której nie dochodzi do przebicia, to wytrzymałość dielektryczna materiału.

Substance	Dielectric strength (MV/m) or (Volts/micron)
Air[6]	3
Sulfur hexafluoride[5]	8.5–9.8
Alumina[5]	13.4
Window glass[5]	9.8–13.8
Borosilicate glass[5]	20–40
Silicone oil, mineral oil[5][7]	10–15
Benzene[5]	163
Polystyrene[5]	19.7
Waxed paper[11]	40–60
PTFE (Teflon, insulating film)[5][12]	60–173
PEEK (Polyether ether ketone)	23
Mica[5]	118
Diamond[13]	2,000

Rysunek 2: Źródło: Wikipedia

Równania Poissona i Laplace'a

- Laplasjan pola skalarnego $\mathcal{S}(\vec{r})$ to dywergencja gradientu $\mathcal{S}(\vec{r})$

$$\begin{aligned}\triangle\mathcal{S}(\vec{r}) &= \operatorname{div}\operatorname{grad}\mathcal{S}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\mathcal{S}(\vec{r}) \\ &= \frac{\partial^2\mathcal{S}(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathcal{S}(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathcal{S}(x,y,z)}{\partial z^2}\end{aligned}$$

- Potencjalność $\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$
  i prawo Gaussa $\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r})/\varepsilon_0$
  dają **równanie Poissona** dla potencjału elektrostatycznego

$$\triangle\varphi(\vec{r}) = -\varrho(\vec{r})/\varepsilon_0 \tag{19}$$

- W obszarach, w których gęstość ładunku $\varrho(\vec{r})$ znika,
  potencjał $\varphi(\vec{r})$ spełnia **równanie Laplace'a**

$$\triangle\varphi(\vec{r}) = 0 \tag{20}$$

- Równania Poissona i Laplace'a dostarczają alternatywnej metody rozwiązywania problemów elektrostatycznych.
- Równanie Poissona zawiera **pełną informację** o elektrostatyce.

Laplasjan pola sferycznie symetrycznego

- Przypomnienienie:
  $\mathcal{S}(\vec{r}) = \tilde{\mathcal{S}}(|\vec{r}|) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{grad}\mathcal{S}(\vec{r}) = \tilde{\mathcal{S}}\,'(|\vec{r}|)\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
  $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \mathscr{V}(|\vec{r}|)\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = v(|\vec{r}|)\,\vec{r} \qquad \Rightarrow$
  $\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = v'(|\vec{r}|)\,|\vec{r}| + 3v(|\vec{r}|)$
- Łatwo sprawdzić, że ($r \equiv |\vec{r}|$)

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \mathscr{V}'(r) + \frac{2}{r}\mathscr{V}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^2\mathscr{V}(r)\right\}$$

- Laplasjan pola $\mathcal{S}(\vec{r}) = \tilde{\mathcal{S}}(|\vec{r}|)$

$$\triangle\mathcal{S}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\tilde{\mathcal{S}}(r)\right\}$$

Sferycznie symetryczne rozwiązanie r. Laplace'a

- Szukamy rozwiązania $\triangle\varphi(\vec{r}) = 0$ o symetrii sferycznej, tj. $\varphi(\vec{r}) = \tilde{\varphi}(r)$
- Laplasjan

$$\triangle\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\tilde{\varphi}(r)\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\tilde{\varphi}(r)\right\} = 0$$

- Tylko stała ma zerową pochodną w przedziale $r \in (0, \infty)$

$$r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\tilde{\varphi}(r) = C_1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\tilde{\varphi}(r) = \frac{C_1}{r^2}$$

- Całkując stronami dostajemy

$$\tilde{\varphi}(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

- Znalezione rozwiązanie jest potencjałem punktowego ładunku $Q = -4\pi\varepsilon_0 C_1$ wybranym tak, że $\tilde{\varphi}(\infty) = C_2$
- Ściśle rzecz biorąc, rozwiązanie o $C_1 \neq 0$ **nie** spełnia równania Laplace'a w **całej** przestrzeni: znaleziona funkcja $\varphi(\vec{r})$ nie jest różniczkowalna w $r = 0$.

Przykład: pole sfery jednorodnie naładowanej

- Sfera ma promień a i gęstość powierzchniową σ (jeszcze^n raz)
- Ładunek ma symetrię sferyczną $\Rightarrow$ potencjał też (całka)
- Z równania Laplace'a

$$\tilde{\varphi}(r) = \begin{cases} -\frac{C_1}{r} + C_2 & \text{dla} \quad r < a \\ -\frac{C_3}{r} + C_4 & \text{dla} \quad r > a \end{cases}$$

- Sfera pusta w środku $\Rightarrow$ $\boxed{C_1 = 0}$
- Punkt odniesienia $\tilde{\varphi}(\infty) = 0 \Rightarrow \boxed{C_4 = 0}$
- Ciągłość potencjału $\Rightarrow$ $\boxed{C_2 = -C_3/a}$
- Pole elektrostatyczne

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = -\tilde{\varphi}'(r)\,\frac{\vec{r}}{r} = \begin{cases} \vec{0} & \text{dla} \quad r < a \\ -\frac{C_3}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} & \text{dla} \quad r > a \end{cases}$$

- Warunek brzegowy dla $\vec{E}$

$$-\frac{C_3}{a^2}\,\frac{\vec{r}}{a} - \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{a} \qquad \forall_{\vec{r}\in \text{Sfera}(a)}$$

- Stąd: $\boxed{-C_3 = \sigma\, a^2/\varepsilon_0 = k_e Q_{\text{Sfery}}}$