Dywergencja i rotacja pola wektorowego

- Weźmy dowolne pole wektorowe
$$\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \mathcal{V}_x(x,y,z)\vec{i} + \mathcal{V}_y(x,y,z)\vec{j} + \mathcal{V}_z(x,y,z)\vec{k}$$
- Wprowadzamy operator różniczkowy $\vec{\nabla}$ (tzw. nabla)
$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{16}$$
- Dywergencja pola $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})$ to pole skalarne
$$\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \frac{\partial \mathcal{V}_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{V}_z(x,y,z)}{\partial z}$$
- Rotacja pola $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})$ to pole wektorowe
$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{V}_x & \mathcal{V}_y & \mathcal{V}_z \end{vmatrix}$$
$$= \left\{\frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{V}_y}{\partial z}\right\}\vec{i} + \left\{\frac{\partial \mathcal{V}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial x}\right\}\vec{j} + \left\{\frac{\partial \mathcal{V}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{V}_x}{\partial y}\right\}\vec{k}$$
- Gradient: $\mathrm{grad}\,\mathcal{S}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\,\mathcal{S}(\vec{r}) = \vec{i}\,\frac{\partial \mathcal{S}(\vec{r})}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \mathcal{S}(\vec{r})}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \mathcal{S}(\vec{r})}{\partial z}$

Spoiler alert!

- Siła działająca na cząstkę naładowaną umieszczoną w polu elektromagnetycznym

$$\vec{F}_L = q\,\vec{E}(\vec{r},t) + q\,\vec{v}\times\vec{B}(\vec{r},t)$$

- Pole elektryczne $\vec{E}(\vec{r},t)$ i magnetyczne $\vec{B}(\vec{r},t)$ można znaleźć rozwiązując równania Maxwella

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r},t)\\
\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)\\
\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) &= 0\\
\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},t) &= \mu_0\,\vec{j}(\vec{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)
\end{aligned} \tag{17}$$

- Współczynnik μ_0 to tzw. przenikalność magnetyczna próżni

$$\mu_0 \approx \mu_0^{(<2019)} = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{N}{A^2}$$

Przykład: dywergencja i rotacja pola centralnego

- Pole centralne ma postać $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \mathscr{V}(|\vec{r}|)\,\vec{r}/|\vec{r}| = v(|\vec{r}|)\,\vec{r}$
- Na składowych: $\mathcal{V}_x(x,y,z) = v(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,x$ itd.
- Liczymy dywergencję pola $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{v(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,x\right\}$$
$$= v'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + v(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

- Stąd mamy

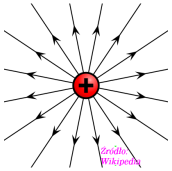
$$\operatorname{div}\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = v'(|\vec{r}|)\,|\vec{r}| + 3v(|\vec{r}|)$$

- Liczymy składowe rotacji pola centralnego $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})$

$$\left[\operatorname{rot}\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})\right]_x = \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{V}_y}{\partial z} = \quad v'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} +$$
$$-v'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

- Podobnie znikają pozostałe składowe: $\operatorname{rot}\vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \vec{0}$

Dywergencja pola ładunku punktowego



- Pole elektryczne ładunku punktowego Q

$$\vec{E}_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = k_e\, Q\, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

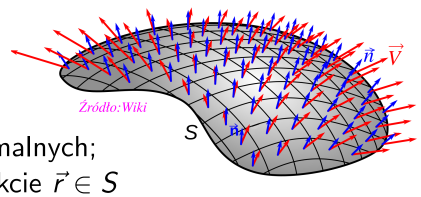
- Dywergencja :

$$\mathrm{div}\, \vec{E}_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = 0 \quad \text{ŹLE!}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{E}_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \vec{r} \neq \vec{0} \\ \infty & \text{dla} \quad \vec{r} = \vec{0} \end{cases} \qquad \text{DOBRZE!}$$

- Składowe $\vec{E}_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r})$ **nie są różniczkowalne** w punkcie $\vec{r} = \vec{0}$.

Strumień pola wektorowego przez powierzchnię



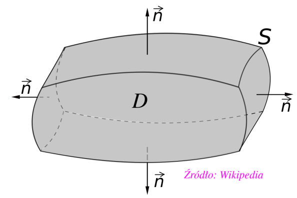
- S – powierzchnia
- $\vec{n}(\vec{r})$ – gładkie pole wersorów normalnych; $\vec{n}(\vec{r})$ jest prostopadły do S w punkcie $\vec{r} \in S$
- $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})$ dowolne gładkie pole wektorowe
- Strumień pola wektorowego $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})$ przez powierzchnię S **w kierunku wyznaczonym przez** pole wektorów normalnych $\vec{n}(\vec{r})$

$$\Phi_{\vec{\mathcal{V}},S,\vec{n}} = \lim_{\max\{\Delta S_i\}\to 0} \sum_i \vec{\mathcal{V}}(\vec{r}_i)\cdot\vec{n}(\vec{r}_i)\,\Delta S_i$$

- Prościej:

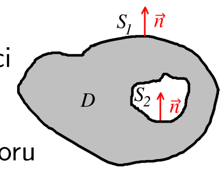
$$\Phi_{\vec{\mathcal{V}},S,\vec{n}} = \iint_S \vec{\mathcal{V}}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego



- D – obszar 3D
- S – zamknięta, kawałkami gładka powierzchnia ograniczająca D, $S = \partial D$
- $\vec{n}(\vec{r})$ – kawałkami gładkie pole **wersorów** normalnych do S, zwróconych **na zewnątrz** obszaru D.
- $\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})$ gładkie pole wektorowe na otoczeniu D
- Wtedy

$$\iiint\limits_D \mathrm{div}\vec{\mathcal{V}}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}V = \oiint\limits_S \vec{\mathcal{V}}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S$$



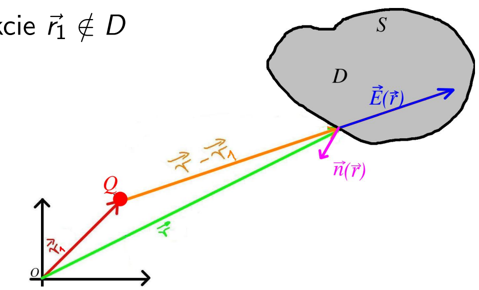
- Powierzchnia S może być sumą rozłącznych części $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ (całka też jest wtedy sumą)
- Twierdzneie GO to odpowiednik 3D zwykłego wzoru $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

- Ładunek punktowy Q w punkcie $\vec{r}_1 \notin D$

  $$\vec{E}(\vec{r}) = k_e Q \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

  $$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{dla} \quad \vec{r} \neq \vec{r}_1$$

  Pole $\vec{E}(\vec{r})$ **jest** gładkie
  w otoczeniu zbioru D



  Z twierdzenia GO

  $$\oiint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \, \mathrm{d}_{\vec{r}} S = \iiint_D \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) \, \mathrm{d}_{\vec{r}} V = 0$$

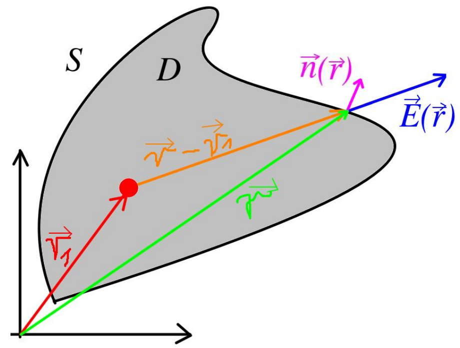
- Strumień pola elektrostatycznego ładunku punktowego przez dowolną powierzchnię zamkniętą, **która nie otacza tego ładunku**, jest zerowy.

- Ładunek Q w punkcie $\vec{r}_1 \in D$

  $$\vec{E}(\vec{r}) = k_e Q \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

  $$\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{dla} \quad \vec{r} \neq \vec{r}_1$$

  Pole $\vec{E}(\vec{r})$ **nie jest** różniczkowalne w $\vec{r} = \vec{r}_1 \in D$



Założenia twierdzenia GO nie są spełnione

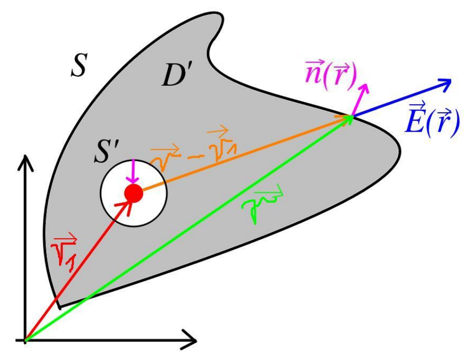
- Ładunek Q w punkcie $\vec{r}_1 \notin D'$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e Q \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{dla} \quad \vec{r} \neq \vec{r}_1$$

Pole $\vec{E}(\vec{r})$ **jest** gładkie na D'

Założenia twierdzenia GO są spełnione



$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S + \oint\!\!\oint_{\text{Mała\_sfera\_S}'} \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S = 0$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S = -\oint\!\!\oint_{\text{Mała\_sfera\_S}'} \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S = \oint\!\!\oint_{\text{Mała\_sfera\_S}'} \vec{E}(\vec{r})\cdot\{-\vec{n}(\vec{r})\}\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Strumień (w kierunku normalnej zewn.) pola $\vec{E}(\vec{r})$ ładunku punktowego Q przez dowolną powierzchnię zamkniętą, **która go otacza**, jest równy Q/ε_0

Prawo Gaussa (wersja całkowa)

- Z zasady superpozycji i liniowości całki odtworzyliśmy prawo Gaussa:
  Strumień (w kierunku normalnej zewnętrznej) pola elektrostatycznego przez dowolną powierzchnią zamkniętą S wynosi Q_{wew}/ε_0, gdzie Q_{wew} jest ładunkiem znajdującym się wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią S

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{n}_{zew}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S = \frac{Q_{wew}}{\varepsilon_0}$$

- Zakładamy, że ładunki punktowe nie leżą na samej powierzchni S
- Prawo Gaussa dostaliśmy jako bezpośrednią konsekwencję prawa Coulomba i zasady superpozycji

Prawo Gaussa (wersja różniczkowa)

- Przypuśćmy, że pole elektrostatyczne $\vec{E}(\vec{r})$ jest wytwarzane przez ciągły rozkład ładunku o gęstości $\varrho(\vec{r})$.
- Funkcja $\vec{E}(\vec{r})$ nie ma osobliwości pola związanych z istnieniem ładunków punktowych (przykład: pole naładowanej kuli jest wszędzie skończone).
- Na mocy tw. GO i prawa Gaussa, dla **dowolnego** obszaru ograniczonego D, którego brzegiem jest powierzchnia $S = \partial D$ mamy
$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}V = \oint\!\!\!\oint\limits_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}_{\vec{r}}S = Q_{wew}/\varepsilon_0$$
$$= \iiint\limits_D \varrho(\vec{r})/\varepsilon_0\,\mathrm{d}_{\vec{r}}V$$
- Dla funkcji ciągłych oznacza to, że
$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r})/\varepsilon_0$$
- Różniczkowa i całkowa wersja prawa Gaussa są równoważne dzięki tw. GO.

Spoiler alert!

- Siła działająca na cząstkę naładowaną umieszczoną w polu elektromagnetycznym

$$\vec{F}_L = q\,\vec{E}(\vec{r},t) + q\,\vec{v}\times\vec{B}(\vec{r},t)$$

- Pole elektryczne $\vec{E}(\vec{r},t)$ i magnetyczne $\vec{B}(\vec{r},t)$ można znaleźć rozwiązując równania Maxwella

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r},t)\\
\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)\\
\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) &= 0\\
\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},t) &= \mu_0\,\vec{j}(\vec{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)
\end{aligned} \tag{18}$$

- Współczynnik μ_0 to tzw. przenikalność magnetyczna próżni

$$\mu_0 \approx \mu_0^{(<2019)} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{N}{A^2}$$

Dywergencja pola rozkładów ładunku

$k_e = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{V}}(\vec{R}\,) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{V}}(\vec{R}\,) = \frac{\partial \mathcal{V}_x(X,Y,Z)}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{V}_y(X,Y,Z)}{\partial Y} + \frac{\partial \mathcal{V}_z(X,Y,Z)}{\partial Z}$$

- Dla ładunków objętościowych, również bezpośrednio z całki Coulomba

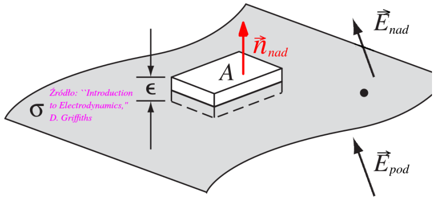
$$\vec{E}(\vec{R}\,) = k_e \iiint\limits_{\text{Objętość}} \frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}\,|^3}\,\varrho(\vec{r}\,)\mathrm{d}_{\vec{r}}V$$

można pokazać, że $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{R}) = \vec{0}$ oraz

$$\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{R})$$

przyjmujemy $\varrho(\vec{R}) = 0$ poza obszarem całkowania.

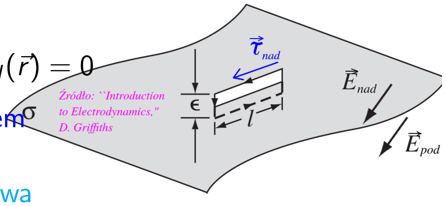
Warunki brzegowe



Badamy nieciągłości pola $\vec{E}(\vec{r})$ przy powierzchni naładowanej z gęstością powierzchniową $\sigma(\vec{r})$

Z prawa Gaussa w wersji całkowej:

$$\vec{E}_{nad}(\vec{r})\cdot\vec{n}_{nad}(\vec{r})-\vec{E}_{pod}(\vec{r})\cdot\vec{n}_{nad}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})/\varepsilon_0$$



Znikanie całki $\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$\vec{E}_{nad}(\vec{r})\cdot\vec{\tau}_{nad}(\vec{r}) - \vec{E}_{pod}(\vec{r})\cdot\vec{\tau}_{nad}(\vec{r}) = 0$$

gdzie $\vec{\tau}_{nad}(\vec{r})$ jest dowolnym wektorem stycznym do powierzchni w $\vec{r}$

Składowa styczna jest ciągła; składowa normalna w ogólności nie. Wektorowo:

$$\vec{E}_{nad}(\vec{r}) - \vec{E}_{pod}(\vec{r}) = \vec{n}_{nad}(\vec{r})\,\sigma(\vec{r})/\varepsilon_0$$

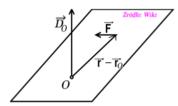
zwrot $\vec{n}_{nad}(\vec{r})$: od "pod" do "nad"

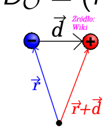
Potencjał: $\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = -\int\limits_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$\varphi_{nad}(\vec{r}) - \varphi_{pod}(\vec{r}) = 0 \qquad (|\vec{E}(\vec{r})| < \infty)$$

Moment siły działającej na dipol

- Moment siły $\vec{F}$ działającej na ciało w punkcie $\vec{r}$ liczony względem punktu odniesienia $\vec{r}_{\mathcal{O}}$ to $\vec{D}_{\mathcal{O}} = (\vec{r} - \vec{r}_{\mathcal{O}}) \times \vec{F}$





- Sumaryczny moment siły **zewnętrznego** pola elektrycznego $\vec{E}(\vec{r})$ działającej na dipol, którego ładunek $-q$ jest w $\vec{r}$, a $+q$ w $\vec{r} + \vec{d}$ to

$$\begin{aligned}\vec{D}_{\mathcal{O}} &= (\vec{r} - \vec{r}_{\mathcal{O}}) \times (-q)\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{r} + \vec{d} - \vec{r}_{\mathcal{O}}) \times q\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) \\ &\approx (\vec{r} - \vec{r}_{\mathcal{O}}) \times (-q)\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{r} + \vec{d} - \vec{r}_{\mathcal{O}}) \times q\vec{E}(\vec{r})\end{aligned}$$

  jeśli dipol jest dostatecznie mały.
- Dla idealnego dipola o momencie dipolowym $\vec{p}$

$$\vec{D}_{\mathcal{O}} = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

- Wynik nie zależy od wyboru punktu odniesienia $\mathcal{O}$
- Moment siły obraca dipol tak, że kierunki i zwroty $\vec{p}$ i $\vec{E}(\vec{r})$ są zgodne

Dielektryki (izolatory)

- Inaczej niż w przewodnikach, ładunki w dielektrykach nie mogą się swobodnie przemieszczać.
- Elektrony mogą się jednak przemieszczać wewnątrz cząsteczek/atomów, z których składa się materiał, przez co cząsteczki/atomy uzyskują elektryczne momenty dipolowe w zewnętrznym polu elektrycznym.
- Jeśli materiał (np. woda) składa się z cząsteczek polarnych (posiadających trwałe momenty dipolowe), to pod wpływem momentu sił wywołanego zewnętrznym polem elektrycznym momenty dipolowe ustawią się zgodnie z polem.
- W obu przypadkach, materiał staje się spolaryzowany, uzyskując niezerowy wektor polaryzacji $\vec{P}(\vec{r})$, tj. gęstość momentu dipolowego.
- Całkowity moment dipolowy dowolnego obszaru $\mathscr{V}$ spolaryzowanego ciała to

$$\vec{p}_{\mathscr{V}} = \iiint_{\mathscr{V}} \vec{P}(\vec{r}) \mathrm{d}_{\vec{r}} V$$

Dielektryki (izolatory)

- Potencjał dipola umieszczonego w $\vec{r} = \vec{0}$.

$$\varphi_{\text{dipol}}(\vec{R}\,) = k_e \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{|\vec{R}\,|^3}$$

- Potencjał wytwarzany przez spolaryzowany dielektryk

$$\varphi_{\text{polaryzacja}}(\vec{R}\,) = k_e \iiint\limits_{\text{Dielektryk}} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,) \cdot \left\{ \vec{R} - \vec{r}\, \right\}}{|\vec{R} - \vec{r}\,|^3} \mathrm{d}_{\vec{r}} V$$

- Potencjał $\varphi_{\text{polaryzacja}}$ jest taki sam jak potencjał wytwarzany przez **ładunki związane** znajdujące się w obszarze dielektryka i na jego powierzchni

$$\rho_{zw}(\vec{r}\,) = -\mathrm{div} \vec{P}(\vec{r}\,)\,, \qquad \sigma_{zw}(\vec{r}\,) = +\vec{P}(\vec{r}\,) \cdot \vec{n}_{\text{zewn}}(\vec{r}\,)\,,$$

gdzie $n_{\text{zewn}}(\vec{r}\,)$ jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni dielektryka w punkcie $\vec{r}$, pokazującym na zewnątrz dielektryka.

- Znaki: zwrot momentu dipolowego + tw. GO.