

Różniczkowanie funkcji złożonej (przypomnienie)

- ▶ Jeśli funkcja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz funkcje $\mathcal{X}_i(t)$ są dostatecznie regularne, to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\mathcal{X}_1(t), \dots, \mathcal{X}_n(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathcal{X}_1(t), \dots, \mathcal{X}_n(t))\mathcal{X}'_1(t) + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathcal{X}_1(t), \dots, \mathcal{X}_n(t))\mathcal{X}'_n(t) \end{aligned}$$

Różniczkowanie funkcji złożonej (przykład)

- Przykład: weźmy funkcję trzech zmiennych

$$f(x, y, z) = x y^2 z^3$$

jej pochodne cząstkowe to

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = y^2 z^3, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 2 x y z^3, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 3 x y^2 z^2$$

Weźmy teraz funkcję złożoną

$$\varphi(t) = f(\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t), \mathcal{Z}(t)) = \mathcal{X}(t) \mathcal{Y}(t)^2 \mathcal{Z}(t)^3$$

gdzie $\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t), \mathcal{Z}(t)$ są pewnymi funkcjami "czasu" t , i obliczmy jej pochodną

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \mathcal{X}'(t) [\mathcal{Y}(t)^2 \mathcal{Z}(t)^3] + \mathcal{X}(t) \frac{d}{dt} [\mathcal{Y}(t)^2 \mathcal{Z}(t)^3] \\ &= \mathcal{X}'(t) \mathcal{Y}(t)^2 \mathcal{Z}(t)^3 + 2 \mathcal{X}(t) \mathcal{Y}(t) \mathcal{Y}'(t) \mathcal{Z}(t)^3 + 3 \mathcal{X}(t) \mathcal{Y}(t)^2 \mathcal{Z}(t)^2 \mathcal{Z}'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t), \mathcal{Z}(t)) \mathcal{X}'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t), \mathcal{Z}(t)) \mathcal{Y}'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(t), \mathcal{Z}(t)) \mathcal{Z}'(t) \end{aligned}$$

Powierzchnie ekwipotencjalne

- ▶ Niech $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ parametryzuje pewną krzywą w przestrzeni 3-wymiarowej, lub np. reprezentuje ruch ciała w funkcji czasu.
- ▶ Dla funkcji $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t))z'(t) \\ &= \text{grad}f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\end{aligned}$$

- ▶ Zastosowanie: Jeśli cząstka porusza się po powierzchni ekwipotencjalnej to $\varphi(\vec{r}(t)) = \text{const}$ więc pole elektrostatyczne \vec{E} jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej
- ▶ Niech $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ oraz $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ wtedy

$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt$$

Powierzchnie ekwipotencjalne

$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt \quad (15)$$

- ▶ Odwrotnie, jeśli pole \vec{E} jest prostopadłe do powierzchni w każdym jej punkcie, to jest to powierzchnia ekwipotencjalna.
- ▶ Widzimy, że pole \vec{E} jest zwrócone w stronę punktów o mniejszym potencjale
- ▶ Można też pokazać, że kierunek pola \vec{E} jest kierunkiem najszybszej zmienności potencjału.
- ▶ Z wyprowadzenia jest jasne, że całka w (15) nie zależy od parametryzacji krzywej K opisanej przez $\vec{r}(t)$, ani nawet od samej krzywej K . Oznaczamy ją

$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

- ▶ Wniosek: Całka z pola **elektrostatycznego** po dowolnej krzywej **zamkniętej** jest równa zero: $\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$

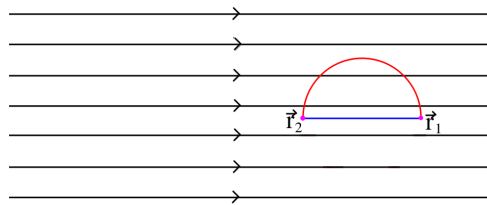
Napięcie elektryczne

- ▶ Napięcie elektryczne to różnica potencjałów elektrycznych między dwoma punktami pola elektrostatycznego

$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

- ▶ Podobnie jak potencjał elektryczny napięcie jest skalarem.
- ▶ Często oznacza się je strzałką pokazującą w którą stronę liczona jest różnica potencjałów

Napięcie $U_{21} = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$



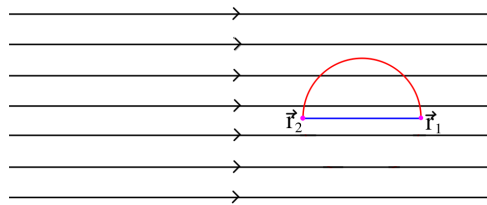
- ▶ Przykład: wyznaczyć napięcie U_{21} między punktami $\vec{r}_2 = [-a, 0, 0]$ oraz $\vec{r}_1 = [+a, 0, 0]$ w jednorodnym polu elektrycznym $\vec{E}(\vec{r}) = [E_0, 0, 0]$ całkując po krzywej niebieskiej i czerwonej.

- ▶ Krzywa niebieska :

$$\vec{r}(t) = [-a t, 0, 0], \quad t_1 = -1, \quad t_2 = +1, \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = [-a, 0, 0]$$

$$U_{21} = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt = E_0 a \int_{-1}^{1} dt = 2E_0 a$$

Napięcie $U_{21} = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

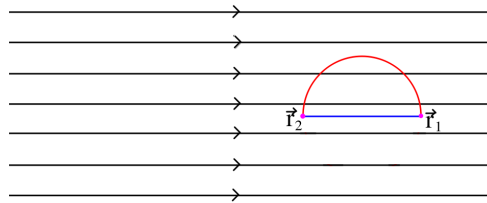


- ▶ Przykład: wyznaczyć napięcie U_{21} między punktami $\vec{r}_2 = [-a, 0, 0]$ oraz $\vec{r}_1 = [+a, 0, 0]$ w jednorodnym polu elektrycznym $\vec{E}(\vec{r}) = [E_0, 0, 0]$ całkując po krzywej niebieskiej i czerwonej.
- ▶ Krzywa czerwona (półokrąg) :

$$\vec{r}(t) = [a \cos(t), a \sin(t), 0], \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi, \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = [-a \sin(t), a \cos(t), 0]$$

$$U_{21} = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{E}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt = E_0 a \int_0^\pi \sin(t) dt = E_0 a (-\cos(t)) \Big|_{t=0}^{t=\pi} = 2E_0 a$$

Napięcie $U_{21} = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$



- ▶ Przykład: wyznaczyć napięcie U_{21} między punktami $\vec{r}_2 = [-a, 0, 0]$ oraz $\vec{r}_1 = [+a, 0, 0]$ w jednorodnym polu elektrycznym $\vec{E}(\vec{r}) = [E_0, 0, 0]$ całkując po krzywej niebieskiej i czerwonej.
- ▶ Inny sposób: zauważmy, że potencjałem pola jednorodnego \vec{E} jest funkcja liniowa

$$\varphi(x, y, z) = -E_0 x$$

$$U_{21} = \varphi(-a, 0, 0) - \varphi(+a, 0, 0) = 2E_0 a$$

Napięcie a praca

- ▶ Praca siły potencjalnej $\vec{F}(\vec{r})$ przy przesuwaniu ciała z położenia \vec{r}_1 do \vec{r}_2 to

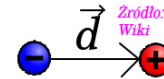
$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = \int_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

- ▶ Dla siły elektrostatycznej $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$ działającej na ładunek próbny q

$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = -q U_{21}$$

- ▶ Napięcie między dwoma punktami to praca jaką trzeba wykonać przeciwdziałając siłom elektrostatycznym przy przenoszeniu ładunku między punktami pola podzielona przez wartość ładunku.

Dipol elektryczny

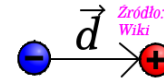


- ▶ Dipol elektryczny to układ dwóch ładunków punktowych o przeciwnych wartościach $+q$ i $-q$, rozseparowanych o wektor \vec{d} pokazujący od położenia $-q$ do położenia $+q$.
- ▶ Wyznamy pole \vec{E} dipola w dużej, w porównaniu z jego rozmiarami, odległości od niego.
- ▶ Wybieramy układ współrzędnych tak, że ładunek $-q$ jest w jego początku, $\vec{r}_1 = \vec{0}$, $q_1 = -q$. Wtedy $\vec{r}_2 = \vec{d}$, $q_2 = +q$.
- ▶ Pole elektryczne w punkcie \vec{r}

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} q_i = -k_e q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + k_e q \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3}$$

- ▶ Liczymy $|\vec{r} - \vec{d}|^2 = (\vec{r} - \vec{d}) \cdot (\vec{r} - \vec{d}) = \vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{d} = r^2 - 2r d \cos \theta + d^2$ gdzie $r = |\vec{r}|$, $d = |\vec{d}|$, a θ jest kątem między \vec{r} a \vec{d}

Dipol elektryczny



- ▶ Pole elektryczne w punkcie \vec{r}

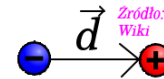
$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_e q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + k_e q \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3}$$

- ▶ Potrzebujemy $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} = (r^2 - 2r d \cos \theta + d^2)^{-3/2} = r^{-3} \left(1 - 2\frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2}\right)^{-3/2} \approx r^{-3} \left(1 - 2\frac{d}{r} \cos \theta\right)^{-3/2}$ dla $r \gg d$
- ▶ Funkcję $f(x) = (1 + x)^{-3/2}$ można dla małych x przybliżyć przez

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x = 1 - \frac{3}{2}x$$

- ▶ $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} \approx r^{-3} \left(1 + 3\frac{d}{r} \cos \theta\right)$
- ▶ $\frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} \approx \frac{1}{r^3} (\vec{r} - \vec{d}) \left(1 + 3\frac{d}{r} \cos \theta\right) \approx \frac{1}{r^3} \left(\vec{r} - \vec{d} + 3\vec{r}\frac{d}{r} \cos \theta - 3\vec{d}\frac{d}{r} \cos \theta\right) \approx \frac{1}{r^3} \left(\vec{r} - \vec{d} + 3\vec{r}\frac{d}{r} \cos \theta\right)$

Dipol elektryczny



- ▶ Pole elektryczne w punkcie \vec{r}

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_e q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + k_e q \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} \approx \frac{1}{r^3} \left(\vec{r} - \vec{d} + 3 \frac{d}{r} \cos \theta \vec{r} \right) = \frac{1}{r^3} \left(\vec{r} - \vec{d} + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} \vec{r} \right)$$

- ▶ Pole dla $|\vec{r}| \gg |\vec{d}|$ zależy tylko od **elektrycznego momentu dipolowego**

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

- ▶ i ma postać

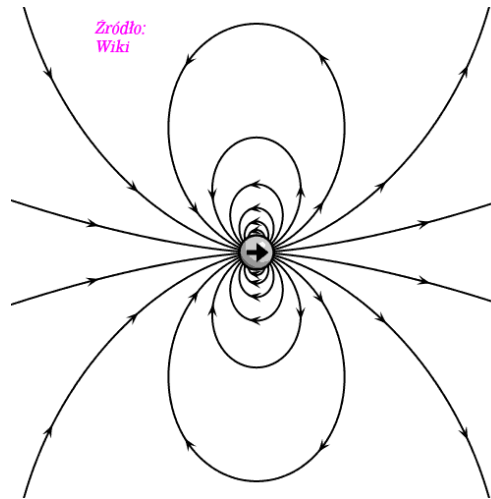
$$\vec{E}(\vec{r}) = +k_e \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^2} \vec{r} - \vec{p} \right) \quad \text{dla} \quad |\vec{r}| \gg |\vec{d}|$$

- ▶ Pole dipola maleje jak $1/|\vec{r}|^3$ dla dużych $|\vec{r}|$
- ▶ Pole dipola nie jest sferycznie symetryczne

Dipol elektryczny

- Pole dipola idealnego

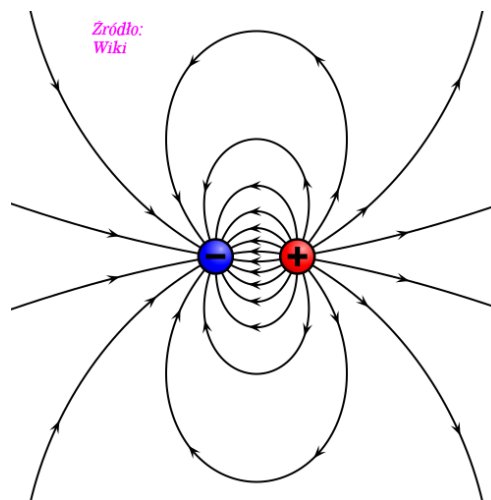
$$\vec{E}(\vec{r}) = +k_e \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^2} \vec{r} - \vec{p} \right)$$



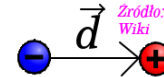
Dipol elektryczny

- Pole dipola fizycznego

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k_e q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + k_e q \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3}$$



Potencjał dipola idealnego



- ▶ Wyznamy potencjał dipola idealnego rozwiązując równanie $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$
- ▶ Pole elektryczne dipola ma postać

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{|\vec{r}|^2} \vec{r} - \vec{p} \right)$$

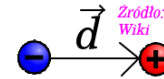
- ▶ Wybieramy układ współrzędnych tak, że moment dipolowy \vec{p} ma kierunek i zwrot zgodny z osią z

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(3 \frac{z p}{|\vec{r}|^2} [x, y, z] - [0, 0, p] \right)$$

- ▶ Poszczególne składowe pola elektrycznego to

$$E_x(\vec{r}) = 3k_e \frac{x z p}{|\vec{r}|^5}, \quad E_y(\vec{r}) = 3k_e \frac{y z p}{|\vec{r}|^5}, \quad E_z(\vec{r}) = k_e \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(3 \frac{z^2 p}{|\vec{r}|^2} - p \right)$$

Potencjał dipola idealnego



$$E_x(\vec{r}) = 3k_e \frac{xz\rho}{|\vec{r}|^5}, \quad E_y(\vec{r}) = 3k_e \frac{yz\rho}{|\vec{r}|^5}, \quad E_z(\vec{r}) = k_e \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(3 \frac{z^2\rho}{|\vec{r}|^2} - \rho \right)$$

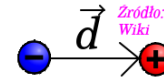
$$\blacktriangleright \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) \Rightarrow \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} = -E_x(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= - \int E_x(x, y, z) dx = - \int 3k_e \frac{xz\rho}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 + y^2 + z^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = -\frac{3}{2} k_e \rho z \int \frac{dt}{t^{5/2}} = +k_e \rho z \frac{1}{t^{3/2}} + C_1(y, z) \\ &= k_e \rho z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + C_1(y, z) \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \text{Funkcję } C_1(y, z) \text{ dostaniemy z równania } \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} = -E_y(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} &= \frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ k_e \rho z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{\partial C_1(y, z)}{\partial y} - \frac{3}{2} \left\{ k_e \rho z \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\} \end{aligned}$$

Potencjał dipola idealnego



$$E_x(\vec{r}) = 3k_e \frac{xz p}{|\vec{r}|^5}, \quad E_y(\vec{r}) = 3k_e \frac{yz p}{|\vec{r}|^5}, \quad E_z(\vec{r}) = k_e \frac{1}{|\vec{r}|^3} \left(3 \frac{z^2 p}{|\vec{r}|^2} - p \right)$$

- ▶ Z równania $\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} = -E_y(\vec{r})$ dostajemy $\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 0$ więc $C_1(y,z) = C_2(z)$

$$\varphi(\vec{r}) = k_e p z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + C_2(z)$$

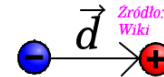
- ▶ Pozostało równanie $\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} = -E_z(\vec{r})$. Liczymy pochodną

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} &= \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ k_e p z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{\partial C_2(z)}{\partial z} + \left\{ \frac{k_e p}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2 k_e p z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\} \end{aligned}$$

Widzimy, że $\frac{\partial C_2(z)}{\partial z} = 0$, czyli $C_2(z) = C$

- ▶ Stałą C wybieramy jako równą zero, co gwarantuje, że potencjał znika w ∞ odległości od dipola

Potencjał dipola idealnego



- ▶ Potencjał dipola idealnego leżącego wzdłuż osi z

$$\varphi(\vec{r}) = k_e \frac{p z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

- ▶ W postaci niezależnej od współrzędnych

$$\varphi(\vec{r}) = k_e \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

- ▶ Dla dużych $|\vec{r}|$ potencjał dąży do zera szybciej niż potencjał ładunku punktowego
- ▶ Przedstawiona metoda pozwala wyznaczyć potencjał przy zadanym polu elektrostatycznym w dowolnej sytuacji.
- ▶ Na ogół równania dla y-owej i z-owej składowej pola dają nietrywialne warunki na $\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y}$ i $\frac{\partial C_2(z)}{\partial z}$, które trzeba całkować podobnie jak równanie na $\frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial x}$. Nie można zapominać o potencjalnej zależności "stałych całkowania" od zmiennych po których nie całkujemy.