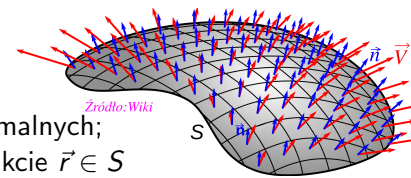


Strumień pola wektorowego przez powierzchnię



- ▶ S – powierzchnia
- ▶ $\vec{n}(\vec{r})$ – gładkie pole wektorów normalnych;
 $\vec{n}(\vec{r})$ jest prostopadły do S w punkcie $\vec{r} \in S$
- ▶ $\vec{V}(\vec{r})$ dowolne gładkie pole wektorowe
- ▶ Strumień pola wektorowego $\vec{V}(\vec{r})$ przez powierzchnię S w kierunku wyznaczonym przez pole wektorów normalnych $\vec{n}(\vec{r})$

$$\Phi_{\vec{V}, S, \vec{n}} = \lim_{\max\{\Delta S_i\} \rightarrow 0} \sum_i \vec{V}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}(\vec{r}_i) \Delta S_i$$

- ▶ Prościej:

$$\Phi_{\vec{V}, S, \vec{n}} = \iint_S \vec{V}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) d\vec{r}S$$

- ▶ Dla powierzchni złożonej z kilku gładkich części S_i , strumień jest sumą całek po poszczególnych S_i .

Przykład 1

- ▶ Obliczyć strumień jednorodnego pola elektrycznego $\vec{E}(\vec{r}) = [0, 0, E_0]$ przez powierzchnię półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ z polem wersorów normalnych zwróconym "odśrodkowo"

- ▶ Parametryzacja (pół)sfery o promieniu a

$$x = \mathcal{X}(\theta, \phi) = a \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = \mathcal{Y}(\theta, \phi) = a \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = \mathcal{Z}(\theta, \phi) = a \cos \theta.$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

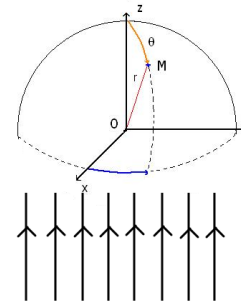
- ▶ Pole wersorów normalnych

$$\vec{n}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{a} = \left[\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right] = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]$$

- ▶ Strumień

$$\Phi = \iint_{\text{Półsfery}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) d\vec{r}S = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} E_0 \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Źródło: Wikipedia



Przykład 1

- ▶ Strumień

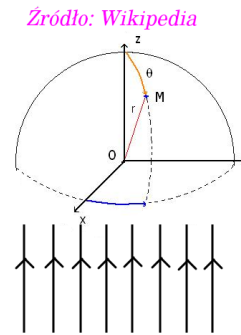
$$\Phi = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} E_0 \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

- ▶ Całka iterowana

$$\Phi = E_0 a^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

- ▶ Podstawienie $t = \sin \theta$, $dt = \cos \theta d\theta$,

$$\Phi = E_0 a^2 \int_{t=0}^1 t dt \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot E_0 a^2$$



Przykład 2: strumień pola $\vec{E}(\vec{r})$ ładunku punkowego przez sferę o środku w tym ładunku

- ▶ Policzmy strumień przez sferę w kierunku **normalnej zewnętrznej**

$$\vec{n}(\vec{r}) = \vec{n}_{zew}(\vec{r}) = \vec{r}/|\vec{r}|$$

- ▶ Pole ładunku punkowego:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e Q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

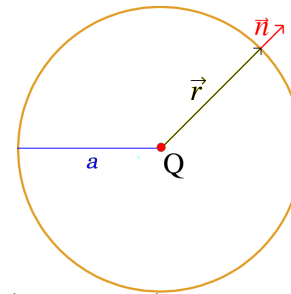
- ▶ Funkcja podcałkowa

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) = k_e Q \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = k_e Q \frac{1}{|\vec{r}|^2} = k_e Q \frac{1}{a^2}$$

- ▶ Strumień

$$\Phi = \iint_{\text{Sfera}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) d\vec{r}S = \frac{k_e Q}{a^2} \iint_{\text{Sfera}} d\vec{r}S = \frac{k_e Q}{a^2} \times 4\pi a^2 = 4\pi k_e Q = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- ▶ Wynik nie zależy od promienia a sfery



Prawo Gaussa (wersja całkowa)

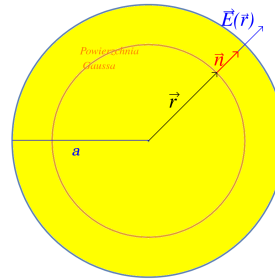
- ▶ **Strumień (w kierunku normalnej zewnętrznej) pola elektrostatycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą S wynosi Q_{wew}/ϵ_0 , gdzie Q_{wew} jest ładunkiem znajdującym się wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią S**

$$\oiint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{zew}(\vec{r}) d\vec{r} S = \frac{Q_{wew}}{\epsilon_0}$$

- ▶ Zakładamy, że ładunki punktowe nie leżą na samej powierzchni S
- ▶ Można pokazać, że prawo Gaussa jest bezpośrednią konsekwencją prawa Coulomba i zasady superpozycji.
- ▶ Zastosowanie: wyznaczanie pola \vec{E} układów o wysokiej symetrii.

Pole \vec{E} sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku

- ▶ Przykładowo, jeśli $\rho(\vec{r})$ jest sferycznie symetryczna, czyli $\rho(\vec{r}) = \tilde{\rho}(|\vec{r}|)$,



- ▶ pole elektryczne ma postać

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

- ▶ Nieznaną funkcję $\mathcal{E}(|\vec{r}|)$ można dostać z prawa Gaussa w wersji całkowej.

Pole \vec{E} sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad \vec{n}(\vec{r}) = \vec{r}/|\vec{r}|$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) = \mathcal{E}(|\vec{r}|)$$

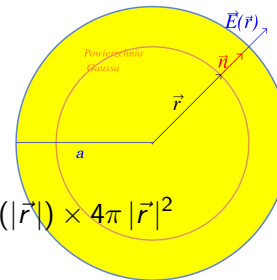
- ▶ Strumień

$$\Phi = \iint_{\text{Sfera}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) d_f S = \mathcal{E}(|\vec{r}|) \iint_{\text{Sfera}} d_f S = \mathcal{E}(|\vec{r}|) \times 4\pi |\vec{r}|^2$$

- ▶ Z prawa Gaussa: $\mathcal{E}(|\vec{r}|)4\pi|\vec{r}|^2 = Q(|\vec{r}|)/\varepsilon_0$
gdzie $Q(|\vec{r}|)$ jest całkowitym ładunkiem zgromadzonym wewnątrz sfery o promieniu $|\vec{r}|$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q(|\vec{r}|)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

- ▶ Wzór ten obsługuje również wcześniej rozważany przypadek jednorodnie naładowanej sfery
- ▶ Dla $|\vec{r}| > a$ odtwarzamy prawo Coulomba.



Pole \vec{E} jednorodnie naładowanej płaszczyzny

- ▶ Nieskończona płaszczyzna $z = 0$ jest jednorodnie naładowana z gęstością powierzchniową σ .
- ▶ Gęstość ładunku nie zależy od x i y (jest niezmiennicza względem przesunięć w kierunkach wektorów tych osi).
- ▶ Jest też niezmiennicza przy obrotach wokół osi prostopadłej do płaszczyzny,
- ▶ oraz obrotach o 180° wokół osi leżącej w jej płaszczyźnie.
- ▶ Pole elektryczne ma postać (\vec{k} jest wektorem osi z)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}(|z|) \frac{z}{|z|} \vec{k}$$

- ▶ Pole $\vec{E}(\vec{r})$ można teraz dostać z całkowej wersji prawa Gaussa
→ [ćwiczenia](#)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{k} \quad (11)$$

- ▶ Po każdej stronie płaszczyzny $z = 0$ jest to pole jednorodne.
- ▶ Wzór (11) można stosować do płyt o skończonych rozmiarach, jeśli odległość punktu \vec{r} od płyty jest mała w porównaniu z odległością \vec{r} od krawędzi płyty.

Pole \vec{E} nieskończenie długiego walca

- ▶ Nieskończony walec o promieniu R , którego oś symetrii obrotowej pokrywa się z osią z , ma objętościową gęstość ładunku o symetrii walcowej

$$\varrho(\vec{r}) = \tilde{\varrho}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

- ▶ Pole elektryczne ma postać

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \mathcal{E}(\sqrt{x^2 + y^2}) \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} \right\} \\ &= \mathcal{E}(\rho) \{ \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} \} = \mathcal{E}(\rho) \vec{n}\end{aligned}$$

gdzie \vec{n} jest wektorem normalnym do powierzchni bocznej walca o promieniu $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

- ▶ Prawa Gaussa pozwala wyrazić $\vec{E}(\vec{r})$ na zewnątrz walca przez **liniową** gęstość ładunku λ ([ćwiczenia](#))

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \{ \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} \}$$

Gradient

- ▶ Gradientem funkcji skalarnej $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$ nazywamy pole wektorowe

$$\text{grad } V(\vec{r}) = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \vec{k}$$

- ▶ Przykład: obliczymy gradient funkcji sferycznie symetrycznej

$$V_S(\vec{r}) = V_S(x, y, z) = \mathcal{V}_S(|\vec{r}|) = \mathcal{V}_S(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

Pochodna po x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_S(x, y, z)}{\partial x} &= \mathcal{V}_S'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \mathcal{V}_S'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

i podobnie dostajemy pochodne po y i z . W efekcie

$$\text{grad } V_S(\vec{r}) = \mathcal{V}_S'(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Potencjał ładunku punktowego

- ▶ $V_S(\vec{r}) = \mathcal{V}_S(|\vec{r}|) \Rightarrow \text{grad} V_S(\vec{r}) = \mathcal{V}_S'(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- ▶ Każde centralne pole wektorowe $\vec{C}(\vec{r}) = \mathcal{C}(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ można przedstawić jako gradient pola skalarne
- ▶ Pole elektryczne ładunku punktowego umieszczonego w początku układu

$$\vec{E}_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = \frac{k_e Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

można przedstawić jako

$$\vec{E}_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = -\text{grad} \varphi_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r})$$

gdzie

$$\varphi_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = \frac{k_e Q}{r}$$

- ▶ Funkcję $\varphi_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r})$ nazywamy potencjałem elektrostatycznym pola ładunku punktowego.

Potencjał ładunków punktowych

- ▶ Dla ładunku punktowego q_i umieszczonego w punkcie \vec{r}_i pole elektryczne

$$\vec{E}_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = k_e q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

jest ujemnym gradientem funkcji $\varphi(\vec{r})$

$$\varphi_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = \frac{k_e q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

- ▶ W efekcie pole dowolnego układu nieruchomych ładunków punktowych

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i k_e q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

jest postaci $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$ gdzie

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{k_e q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Potencjał ciągłych rozkładów ładunku

- ▶ Można pokazać, że całka

$$\varphi(\vec{R}) = k_e \iiint_{\text{Objętość}} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \rho(\vec{r}) d_r V \quad (12)$$

jest potencjałem pola objętościowego rozkładu ładunków

$$\vec{E}(\vec{R}) = k_e \iiint_{\text{Objętość}} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) d_r V$$

- ▶ Dla ładunków powierzchniowych potencjał ma postać

$$\varphi(\vec{R}) = k_e \iint_{\text{Powierzchnia}} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \sigma(\vec{r}) d_r S \quad (13)$$

- ▶ Dla ładunków liniowych

$$\varphi(\vec{R}) = k_e \int_{\text{Krzywa}} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \lambda(\vec{r}) d_r L \quad (14)$$

- ▶ Sumujemy po wszystkich ładunkach; całkujemy po objętości/powierzchni/krzywej zawierającej wszystkie ładunki; dla obszarów

Potencjał elektrostatyczny - podsumowanie

- ▶ Pole elektrostatyczne $\vec{E}(\vec{r})$ wytwarzane przez **nieruchome** ładunki można przedstawić jako ujemny gradient potencjału pola elektrostatycznego $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} \vec{k}$$

- ▶ Siła elektrostatyczna działająca na ładunek próbny umieszczony w polu $\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}) = -q \text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\text{grad } \{q \varphi(\vec{r})\}$ jest siłą zachowawczą.
- ▶ Elektrostatyczna energia potencjalna $\mathcal{E}(\vec{r})$ ładunku puntowego q umieszczonego w punkcie \vec{r} pola to

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = q \varphi(\vec{r})$$

- ▶ Jednostką potencjału pola elektrostatycznego w układzie SI jest volt: $1V = 1J/C$
- ▶ Jednostką pola elektrycznego $\vec{E}(\vec{r})$ jest volt-na-metr $1V/m$

Potencjał elektrostatyczny - podsumowanie

- ▶ Potencjał elektrostatyczny $\varphi(\vec{r})$ jest **zdefiniowany** przez równanie

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} \vec{k}$$

- ▶ Oznacza to, że jest on wyznaczony **tylko** z dokładnością do stałej addytywnej.
- ▶ We wzorach ma potencjał punktowych i ciągłych rozkładów ładunku

$$\varphi(\vec{R}) = \sum_i \frac{k_e q_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|} \quad \varphi(\vec{R}) = k_e \iiint_{\text{Objętość}} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \rho(\vec{r}) d\vec{r} V$$

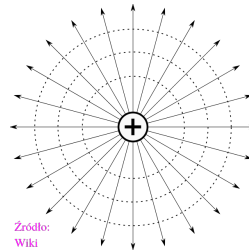
stałą wybrano tak, że potencjał znika w nieskończoności.

- ▶ W wyidealizowanych sytuacjach z rozkładami ładunku rozciągającymi się do nieskończoności, taki wybór prowadzi do rozbieżnych całek na potencjał i trzeba wybrać inaczej

Powierzchnie ekwipotencjalne



$$\varphi_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = \frac{k_e Q}{r} \quad \vec{E}_{\text{ład.pkt.}}(\vec{r}) = \frac{k_e Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



Zródło:
Wiki

- ▶ Powierzchnia ekwipotencjalna to powierzchnia na której potencjał ma stałą wartość.
- ▶ Dla ładunku punktowego powierzchnie ekwipotencjalne są sferami współśrodkowymi z ładunkiem.