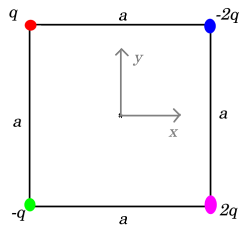
Przykładowe zadanie

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i k_e \, q_i \, \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

- Wybieramy układ współrzędnych związany ze środkiem kwadratu



$\vec{r}_1 = [-a/2, a/2, 0]\,, \quad q_1 = q\,, \qquad \vec{r}_2 = [+a/2, a/2, 0]\,, \quad q_2 = -2q\,,$

$\vec{r}_3 = [a/2, -a/2, 0]\,, \quad q_3 = 2q\,, \qquad \vec{r}_4 = [-a/2, -a/2, 0]\,, \quad q_4 = -q\,,$

- Wektor punktu obserwacji

  $\vec{r} = [0, 0, 0] \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Przykładowe zadanie $q = 10^{-8}C$, $a = 5cm$.

$\vec{r}_1 = [-a/2, a/2, 0]\,, \quad q_1 = q\,, \qquad \vec{r}_2 = [+a/2, a/2, 0]\,, \quad q_2 = -2q\,,$

$\vec{r}_3 = [a/2, -a/2, 0]\,, \quad q_3 = 2q\,, \qquad \vec{r}_4 = [-a/2, -a/2, 0]\,, \quad q_4 = -q\,,$

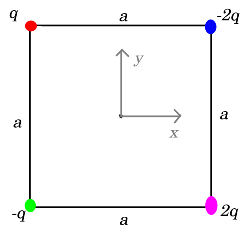
$$\vec{E}(\vec{0}\,) = \sum_{i=1}^{4} k_e\, q_i\, \frac{\vec{0} - \vec{r}_i}{|\vec{0} - \vec{r}_i|^3} = -\frac{2\sqrt{2}k_e}{a^3} \sum_{i=1}^{4}\; q_i \vec{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^{4} q_i \vec{r}_i = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + q_3\vec{r}_3 + q_4\vec{r}_4 = [0, -q\,a, 0]$$

$$\vec{E}(\vec{0}\,) = \frac{2\sqrt{2}k_e}{a^3} q\,a\,[0, 1, 0] = \frac{\sqrt{2}q}{2\pi\varepsilon_0\, a^2}\,[0, 1, 0]$$

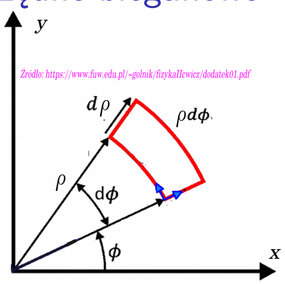
$$|\vec{E}(\vec{0}\,)| = \frac{\sqrt{2}|q|}{2\pi\varepsilon_0\, a^2} = \frac{1.41 \cdot 10^{-8}\,C}{6.28 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\frac{F}{m}\,(0.05)^2 m^2} = 1.01 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$$

Przykładowe zadanie



$$\vec{E}(\vec{0}\,) = \frac{\sqrt{2}q}{2\pi\varepsilon_0\, a^2}\,[0,1,0]$$

Współrzędne biegunowe



$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \mathscr{Y}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathscr{Y}}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \rho$$

$$(x, y) \leftrightarrow (\rho, \phi)$$

$$x = \mathscr{X}(\rho, \phi) = \rho \cos \phi, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty$$
$$y = \mathscr{Y}(\rho, \phi) = \rho \sin \phi, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

- Element powierzchni $$\mathrm{d}S = \rho d\rho \mathrm{d}\phi$$

Współrzędne biegunowe $\quad \mathrm{d}S = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi$

- Obliczyć pole S koła opisanego przez $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.
- We współrzędnych biegunowych koło opisane jest przez warunek $\rho^2 \leqslant R^2$
- Żeby dostać całe koło bierzemy

$$0 \leqslant \rho \leqslant R\,, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

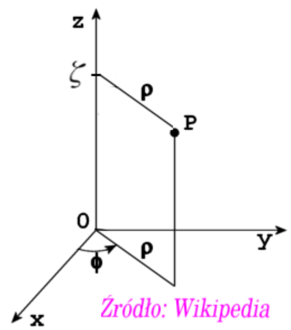
- We współrzędnych biegunowych koło jest prostokątem
- Pole

$$S = \iint\limits_{\text{Koło}} 1 \cdot \mathrm{d}S = \int\limits_{\rho=0}^{R} \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi$$

$$= \int\limits_{\rho=0}^{R} \rho \mathrm{d}\rho \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi$$

$$= \left\{ \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_{\rho=0}^{R} \right\} \cdot \left\{ \phi \Bigg|_{\phi=0}^{2\pi} \right\} = 2\pi \cdot \frac{R^2}{2}$$

Współrzędne walcowe



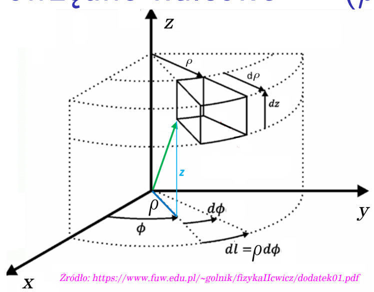
$$(x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \phi, \zeta)$$

$$x = \mathscr{X}(\rho,\phi,\zeta) = \rho\cos\phi, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty$$
$$y = \mathscr{Y}(\rho,\phi,\zeta) = \rho\sin\phi, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$
$$z = \mathscr{Z}(\rho,\phi,\zeta) = \zeta. \qquad -\infty < \zeta < \infty$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Będziemy zwykle pisać z zamiast ζ

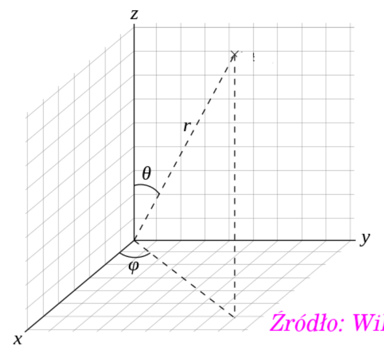
Współrzędne walcowe $\quad (\rho, \phi, \zeta)$

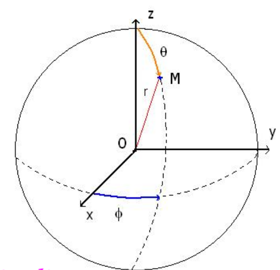


$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial \phi} & \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \mathscr{Y}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathscr{Y}}{\partial \phi} & \frac{\partial \mathscr{Y}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \mathscr{Z}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathscr{Z}}{\partial \phi} & \frac{\partial \mathscr{Z}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \rho$$

- Element objętości: $$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z$$
- Element powierzchni bocznej walca o promieniu R (tj. opisanego równaniem $\rho = R$): $$\mathrm{d}S = R \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z$$
- Jednostkowy wektor prostopadły do powierzchni bocznej walca $\rho = R$: w punkcie (x, y, z) walca, $x^2 + y^2 = R^2$ $$\vec{n} = \left[\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right] = [\cos\phi, \sin\phi, 0]$$

Współrzędne sferyczne





Źródło: Wikipedia

$$(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, \phi)$$

$$x = \mathscr{X}(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \cos\phi, \qquad 0 \leqslant r < \infty$$

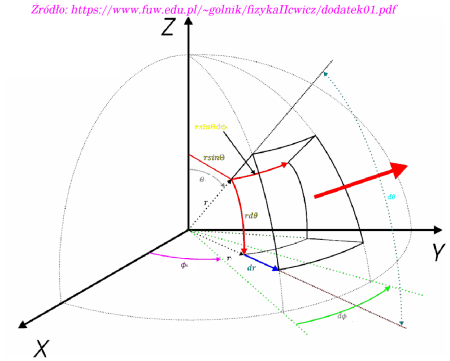
$$y = \mathscr{Y}(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \sin\phi, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$z = \mathscr{Z}(r, \theta, \phi) = r \cos\theta. \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad r \sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Współrzędne sferyczne $\qquad z = r\,\cos\theta$

Źródło: https://www.fuw.edu.pl/~golnik/fizykaIIcwicz/dodatek01.pdf



$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial\mathscr{X}}{\partial r} & \frac{\partial\mathscr{X}}{\partial\theta} & \frac{\partial\mathscr{X}}{\partial\phi} \\ \frac{\partial\mathscr{Y}}{\partial r} & \frac{\partial\mathscr{Y}}{\partial\theta} & \frac{\partial\mathscr{Y}}{\partial\phi} \\ \frac{\partial\mathscr{Z}}{\partial r} & \frac{\partial\mathscr{Z}}{\partial\theta} & \frac{\partial\mathscr{Z}}{\partial\phi} \end{bmatrix} = r^2\sin\theta$$

- Element objętości: $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$
- Element powierzchni sfery o promieniu R (tj. opisanej równaniem $r = R$): $\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$
- Jednostkowy wektor prostopadły do powierzchni sfery $r = R$ w punkcie (x, y, z) sfery, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\vec{n} = \left[\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right] = [\sin\theta\,\cos\phi, \sin\theta\,\sin\phi, \cos\theta]$$

Współrzędne sferyczne $\quad \mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

- Obliczyć objętość V kuli opisanej przez $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.
- We współrzędnych sferycznych kula opisana jest przez warunek $r^2 \leqslant R^2$
- Żeby dostać całą kulę bierzemy

$$0 \leqslant r \leqslant R\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\,, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

- We współrzędnych sferycznych kula jest prostopadłościanem
- Objętość

$$V = \iiint\limits_{\text{Kula}} 1 \cdot \mathrm{d}V = \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$= \int\limits_{r=0}^{R} r^2 \mathrm{d}r \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi$$

$$= \left\{ \left. \frac{r^3}{3} \right|_{r=0}^{R} \right\} \cdot \left\{ \left. -\cos\theta \right|_{\theta=0}^{\pi} \right\} \cdot \left\{ \left. \phi \right|_{\phi=0}^{2\pi} \right\} = 2\pi \frac{R^3}{3} \{-\cos\pi + \cos 0\}$$

Reguły całkowania (czyli reguły różniczkowania od tyłu)

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F(t)+G(t)\right) = F'(t)+G'(t) \quad \Rightarrow \quad \int \left(f(t)+g(t)\right)\mathrm{d}t = \int f(t)\mathrm{d}t + \int g(t)\mathrm{d}t$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(c\,F(t)\right) = c\,F'(t) \quad \Rightarrow \quad \int c\,f(t)\,\mathrm{d}t = c\,\int f(t)\mathrm{d}t$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F(G(t))\right) = F'(G(t))G'(t) \quad \Rightarrow \quad \int F'(G(t))G'(t)\,\mathrm{d}t = F(G(t)) + C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F(t)G(t)\right) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) \quad \Rightarrow \quad \int F'(t)G(t)\mathrm{d}t + \int F(t)G'(t)\mathrm{d}t = F(t)G(t) + C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c = 0 \quad \Rightarrow \quad \int 0\,\mathrm{d}t = C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^{k+1}}{k+1}\right) = t^k \quad \Rightarrow \quad \int t^k\mathrm{d}t = \frac{t^{k+1}}{k+1} + C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln(t)\right) = \frac{1}{t}$ oraz $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln(-t)\right) = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(|t|) + C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^t\right) = e^t \quad \Rightarrow \quad \int e^t\mathrm{d}t = e^t + C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin(\theta) = \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \int \cos(\theta)\mathrm{d}\theta = \sin(\theta) + C$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(-\cos(\theta)) = \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \int \sin(\theta)\mathrm{d}\theta = -\cos(\theta) + C$

Gęstość ładunku elektrycznego

- Gęstością (objętościową) ładunku elektrycznego $\varrho(\vec{r})$ nazywamy stosunek całkowitego ładunku ΔQ w obszarze otaczającym punkt $\vec{r}$ (tj. sumy ładunków wszystkich cząstek znajdujących się w tym obszarze) do objętości ΔV tego obszaru, w granicy gdy ta objętość dąży do zera (przy zachowaniu makroskopowych rozmiarów tego obszaru)

$$\varrho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

- Równoważnie, $\varrho(\vec{r})$ to taka funkcja, której całka po **dowolnym** (każdym) obszarze trójwymiarowym (makroskopowym) $\mathscr{V}$ daje znajdujący się w tym obszarze ładunek $Q_{\mathscr{V}}$

$$Q_{\mathscr{V}} = \iiint\limits_{\mathscr{V}} \varrho(\vec{r}) \mathrm{d}_{\vec{r}} V$$

$$\mathrm{d}_{\vec{r}} V = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,, \qquad \mathrm{d}_{\vec{r}} V = \rho \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}z\,, \qquad \mathrm{d}_{\vec{r}} V = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

Gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego

- Dla cienkich powłok (powierzchni) wygodniej jest mówić o ładunku przypadającym na jednostkę powierzchni powłoki, tj. o gęstości powierzchniowej ładunku elektrycznego $\sigma(\vec{r})$ na powierzchni S.
- $\sigma(\vec{r})$ to taka funkcja **na powierzchni** S, której całka po **dowolnym** (każdym) fragmencie $\mathscr{S}$ powierzchni S daje znajdujący się na tym fragmencie ładunek $Q_{\mathscr{S}}$

$$Q_{\mathscr{S}} = \iint\limits_{\mathscr{S}} \sigma(\vec{r}) \mathrm{d}_{\vec{r}} S$$

- Dla płaskiej powierzchni

$$\mathrm{d}_{\vec{r}} S = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,, \qquad \mathrm{d}_{\vec{r}} S = \rho \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi$$

- Dla sfery o promieniu a

$$\mathrm{d}_{\vec{r}} S = a^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

- Dla powierzchni bocznej walca o promieniu a

$$\mathrm{d}_{\vec{r}} S = a \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

Gęstość liniowa ładunku elektrycznego

- Dla cienkich nici (krzywych) mówimy o ładunku przypadającym na jednostkę długości krzywej, tj. o gęstości liniowej ładunku elektrycznego $\lambda(\vec{r})$ krzywej L.
- $\lambda(\vec{r})$ to taka funkcja **na krzywej** L, której całka po **dowolnym** (każdym) fragmencie $\mathscr{L}$ krzywej L daje znajdujący się na tym fragmencie ładunek $Q_{\mathscr{L}}$

$$Q_{\mathscr{L}} = \int\limits_{\mathscr{L}} \lambda(\vec{r}) \mathrm{d}_{\vec{r}} L$$

- Dla okręgu o promieniu a

$$\mathrm{d}_{\vec{r}} L = a \mathrm{d}\phi$$

- Dla krzywej płaskiej będącej wykresem funkcji $y = f(x)$ (wzór z Analizy I)

$$\mathrm{d}_{\vec{r}} L = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

- Dla dowolnej krzywej $\vec{r}(t)$ w 3D sparametryzowanej przez t (wzór z Fizyki)

$$\mathrm{d}_{\vec{r}} L = \left| \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t$$

Zasada superpozycji $k_e = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$

- Dla ładunków punktowych

$$\vec{E}(\vec{R}\,) = k_e \sum_i \frac{\vec{R} - \vec{r}_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|^3} q_i$$

- Dla ładunków objętościowych

$$\vec{E}(\vec{R}\,) = k_e \iiint\limits_{\text{Objętość}} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}\,|^3} \varrho(\vec{r}\,)\mathrm{d}_{\vec{r}}V \tag{7}$$

- Dla ładunków powierzchniowych

$$\vec{E}(\vec{R}\,) = k_e \iint\limits_{\text{Powierzchnia}} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}\,|^3} \sigma(\vec{r}\,)\mathrm{d}_{\vec{r}}S \tag{8}$$

- Dla ładunków liniowych

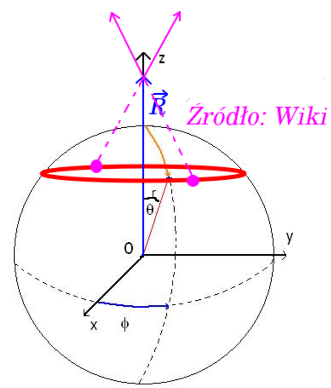
$$\vec{E}(\vec{R}\,) = k_e \int\limits_{\text{Krzywa}} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}\,|^3} \lambda(\vec{r}\,)\mathrm{d}_{\vec{r}}L \tag{9}$$

- Sumujemy po wszystkich ładunkach; całkujemy po objętości/powierzchni/krzywej zawierającej wszystkie ładunki; dla obszarów mieszanych dodajemy wkłady od różnych całek

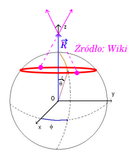
Jednorodnie naładowana sfera o promieniu $a > 0$

$$\vec{E}(\vec{R}\,) = k_e \iint\limits_{\text{Sfera}} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}\,|^3} \sigma \, \mathrm{d}_{\vec{r}} S \,, \qquad\qquad \sigma = \mathrm{const}$$

- Szukamy pola $\vec{E}(\vec{R}\,)$ w dowolnym punkcie $\vec{R}$
- Każdy punkt przestrzeni leży na prostej przechodzącej przez środek sfery, i będącej osią z odpowiednio dobranego układu współrzędnych, którego początek pokrywa się ze środkiem sfery.



Jednorodnie naładowana sfera o promieniu $a > 0$



$$\vec{E}(\vec{R}\,) = k_e \iint\limits_{\text{Sfera}} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}\,|^3} \sigma \, \mathrm{d}_{\vec{r}} S \tag{10}$$

- Każdy punkt przestrzeni leży na prostej przechodzącej przez środek sfery, i będącej osią z odpowiednio dobranego układu współrzędnych.
- Punkt obserwacji $\vec{R} = [0, 0, d]$.
- Punkt sfery we współrzędnych sferycznych (r, θ, ϕ) $\vec{r} = [a \sin\theta \cos\phi \,, a \sin\theta \sin\phi \,, a \cos\theta]$.
- $\vec{R} - \vec{r} = [-a \sin\theta \cos\phi \,, -a \sin\theta \sin\phi \,, d - a \cos\theta]$.
- $|\vec{R} - \vec{r}\,|^2 = (\vec{R} - \vec{r}\,) \cdot (\vec{R} - \vec{r}\,) = \vec{R} \cdot \vec{R} - 2\vec{R} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{r} = d^2 - 2da \cos\theta + a^2$
- element powierzchni $\mathrm{d}_{\vec{r}} S = a^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$
- sfera we współrzędnych sferycznych jest prostokątem

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi \,, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi \,, \qquad r = a$$

Jednorodnie naładowana sfera o promieniu $a > 0$

$$\vec{E}(\vec{R}) = k_e\,\sigma \iint\limits_{\text{Sfera}} \frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} \mathrm{d}_{\vec{r}} S$$

$$= k_e\,\sigma \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \frac{[-a\,\sin\theta\,\cos\phi\,,-a\,\sin\theta\,\sin\phi\,,d-a\,\cos\theta]}{(d^2-2da\cos\theta+a^2)^{3/2}} a^2\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

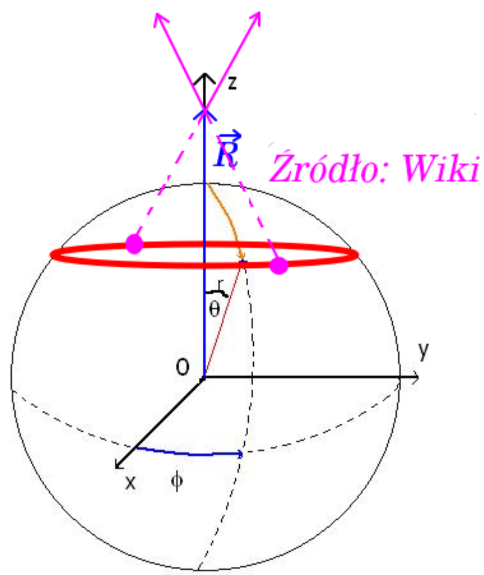
$$= k_e\,\sigma\;a^2 \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{[-a\sin\theta\cos\phi\,,-a\sin\theta\sin\phi\,,d-a\cos\theta]}{(d^2-2da\cos\theta+a^2)^{3/2}}$$

$$= k_e\,\sigma\;a^2 \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\frac{[0\,,0\,,2\pi(d-a\cos\theta)]}{(d^2-2da\cos\theta+a^2)^{3/2}}$$

Pole ma tylko składową z-ową

$$E_z(\vec{R}) = 2\pi k_e\,\sigma\;a^2 \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\frac{(d-a\cos\theta)}{(d^2-2da\cos\theta+a^2)^{3/2}}$$

Jednorodnie naładowana sfera o promieniu $a > 0$



Sfera o promieniu $a > 0$, pole w punkcie $\vec{R} = [0, 0, d]$

$$E_z(\vec{R}) = 2\pi k_e \, \sigma \; a^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \frac{(d - a\cos\theta)}{(d^2 - 2da\cos\theta + a^2)^{3/2}}$$

Podstawienie $t = d^2 - 2da\cos\theta + a^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2d\, a \sin\theta \mathrm{d}\theta$

$$d - a\cos\theta = d + \frac{t - d^2 - a^2}{2d} = \frac{t + d^2 - a^2}{2d}$$

$$E_z(\vec{R}) = 2\pi k_e \, \sigma \; a^2 \frac{1}{2da} \int_{t=(d-a)^2}^{(d+a)^2} \mathrm{d}t \, \frac{t + d^2 - a^2}{2d\, t^{3/2}}$$

$$\boxed{\int t^{\alpha} \mathrm{d}t = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$$

$$= 2\pi k_e \, \sigma \; a^2 \frac{1}{(2d)^2 a} \int_{t=(d-a)^2}^{(d+a)^2} \mathrm{d}t \, \left\{ t^{-1/2} + (d^2 - a^2) t^{-3/2} \right\}$$

$$= 2\pi k_e \, \sigma \; a^2 \frac{1}{(2d)^2 a} \left\{ \frac{t^{+1/2}}{1/2} + (d^2 - a^2) \frac{t^{-1/2}}{-1/2} \right\} \Bigg|_{t=(d-a)^2}^{(d+a)^2}$$

Sfera o promieniu $a > 0$, pole w punkcie $\vec{R} = [0, 0, d]$

$$E_z(\vec{R}) = 2\pi k_e \sigma\ a^2 \frac{1}{(2d)^2 a} \left\{ \frac{t^{+1/2}}{1/2} + (d^2 - a^2)\frac{t^{-1/2}}{-1/2} \right\} \Bigg|_{t=(d-a)^2}^{(d+a)^2}$$

$$= 4\pi a^2 \sigma k_e \frac{1}{(2d)^2 a} \left\{ t^{+1/2} - (d^2 - a^2) t^{-1/2} \right\} \Bigg|_{t=(d-a)^2}^{(d+a)^2}$$

$$= 4\pi a^2 \sigma k_e \frac{1}{(2d)^2 a} \left\{ |d+a| - |d-a| - \frac{(d^2 - a^2)}{|d+a|} + \frac{(d^2 - a^2)}{|d-a|} \right\}$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} +x \ dla\ x \geqslant 0 \\ -x \ dla\ x < 0 \end{cases}}$$

Dla $d > a > 0$ wyrażenie w nawiasie klamrowym to

$$\{\ldots\} = \{(d+a) - (d-a) - (d-a) + (d+a)\} = 4a$$

Dla $0 < d < a$ mamy

$$\{\ldots\} = \{(d+a) - (a-d) - (d-a) - (d+a)\} = 0$$

Pole wewnątrz sfery znika; pole na zewnątrz wygląda jak pole ładunku punktowego $Q = 4\pi a^2 \sigma$ umieszczonego w centrum sfery (Newton, 1687)

$$E_z(\vec{R}) = 4\pi a^2 \sigma k_e / d^2$$